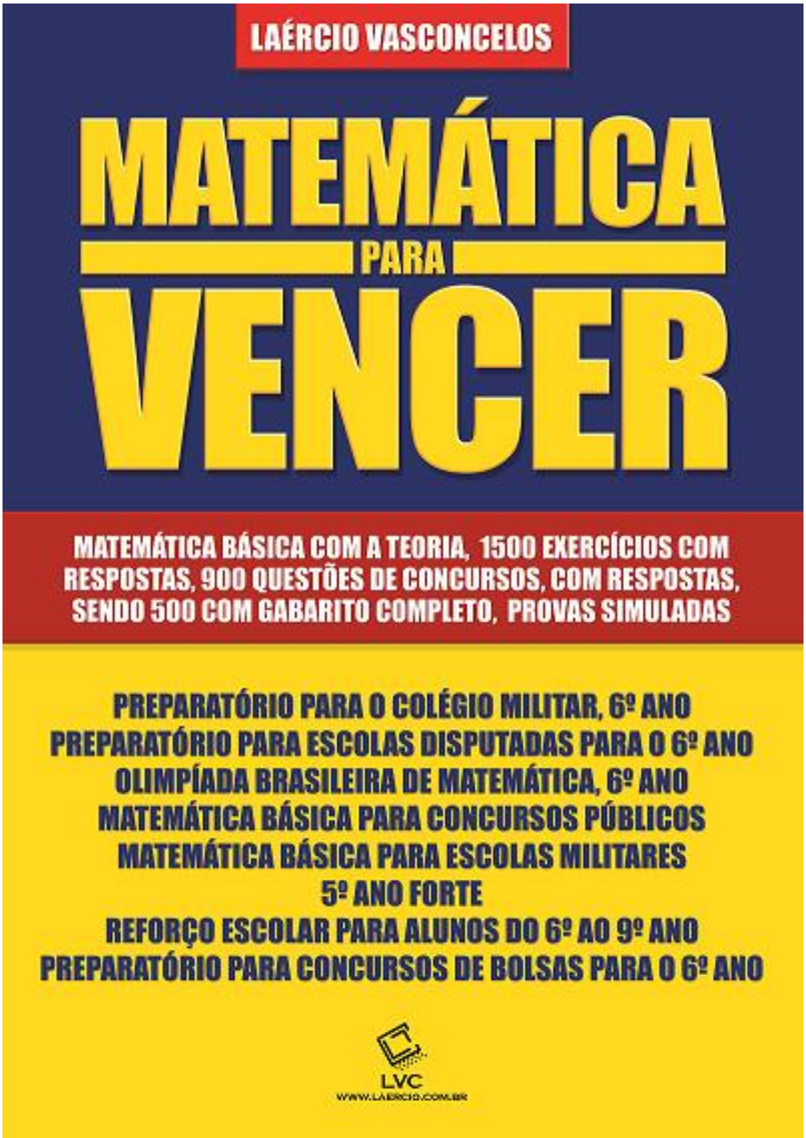
APOSTILA

MATEMÁTICA PARA VENCER

VERSÃO PDF 132 PÁGINAS 1.0 – DOWNLOAD GRÁTIS



Versão 1.0 – Obtenha a versão mais recente em www.laercio.com.br

Extraído do livro MATEMÁTICA PARA VENCER, 622 páginas

Autor: Laércio Vasconcelos

MATEMÁTICA PARA VENCER, versão de 132 páginas

Estude nesta apostila e ao mesmo tempo acompanhe as aulas relativas aos seus capítulos no Youtube, no canal MATEMATICAPARAVENCER.

São 30 horas de aulas com o autor, Laércio Vasconcelos

*** GRATUITAMENTE ***

///

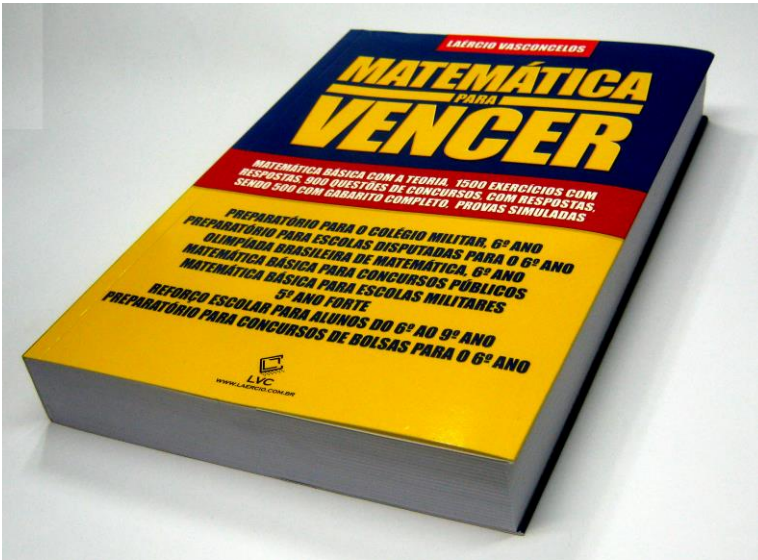
Capítulo 1

Livro e apostila

Matemática para Vencer

Nosso livro principal dedicado ao preparo para o concurso do Colégio Militar, 6º ano, é o MATEMÁTICA PARA VENCER, com 622 páginas e mais de 1500 questões.

Baseado no princípio de que "estudar nunca é demais", o livro visa não apenas dar um preparo suficiente, mas sim, "mais que suficiente" para um candidato ao concurso para o Colégio Militar, 6º ano. Recentemente seu conteúdo foi enriquecido com Apostilas PDF gratuitas, abrindo espaço para novas questões de concurso e conteúdos adicionais. Essas apostilas PDF gratuitas podem ser utilizadas por qualquer aluno, mesmo que não possuam o livro MATEMÁTICA PARA VENCER.



MATEMÁTICA PARA VENCER, 622 PÁGINAS

Apesar de considerarmos como ideal, o uso do MATEMÁTICA PARA VENCER, na sua versão impressa com 622 páginas, levamos em conta que muitos alunos podem estar utilizando outros materiais didáticos já existentes, como seus livros escolares, materiais coletados na Internet e apostilas dos seus cursos, ou outras apostilas em PDF já adquiridas.

Adicionando ainda o fato de disponibilizarmos no Youtube, gratuitamente, 30 horas de aulas com o autor do MATEMÁTICA PARA VENCER, relativas aos seus capítulos, optamos por criar a presente versão em PDF, com 132 páginas, que apesar de ter menos conteúdo que a versão em papel, permite um bom acompanhamento das aulas no Youtube, além de conter uma parte teórica suficiente para um bom aprendizado. De fato você encontrará neste arquivo PDF mais de 150 páginas, mas foram baseadas em 132 páginas do livro. As páginas adicionais no PDF devem-se adição de capa, páginas em branco entre alguns capítulos e expansões de espaços na formatação.

Nossa recomendação é que o estudante use essa apostila como base e parta para materiais mais extensos e com mais exercícios e questões de concurso, principalmente do Colégio Militar e Olimpíadas de Matemática, 6º ano.

As aulas com o autor no Youtube estão no canal MATEMATICAPARAVENCER.

O livro MATEMÁTICA PARA VENCER, com 622 páginas, é encontrado em www.laercio.com.br e nas principais livrarias.

Numeração dos exercícios e questões

Você logo observará que a numeração dos exercícios e questões desta apostila estão na ordem crescente, mas seus números estão salteados. Ocorre que esses exercícios e questões são extratos do livro de 622 páginas, e os vídeos que você vai estudar no Youtube (canal MATEMATICAPARAVENCER) quando citam um exercício ou questão usam a numeração do livro original. Portanto, para facilitar a localização desses itens dentro desta apostila, usamos os mesmos números citados nos vídeos, que são os números que constam no livro original.

Colégio Pedro II e Colégios de Aplicação (CAP)

Os concursos para o 6º ano citados acima cobram matéria similar à cobrada no concurso para o Colégio Militar, mas existem algumas diferenças. O Colégio Militar oferece um número menor de vagas, o que exige que o aluno obtenha para garantir sua aprovação, notas maiores no exame. Sendo assim é preciso, para aprovação no Colégio Militar, realizar um estudo mais intenso, com realização de mais exercícios.

Os candidatos ao Pedro II, CAP e outros similares deverão estudar com afinco todo o conteúdo dessa apostila, e estender seus estudos com outras fontes, como realização de provas de anos anteriores, os exercícios dos seus livros escolares e apostilas do curso preparatório que eventualmente realizem. É claro, a versão de 622 páginas do livro MATEMÁTICA PARA VENCER apresenta um aprofundamento e uma quantidade de exercícios e questões mais que suficiente para sucesso nos exames do Pedro II, CAP e outros concursos para o 6º ano.

ESTUDAR NUNCA É DEMAIS !

Laercio Vasconcelos, autor

Engenheiro Eletrônico formado pelo IME – Instituto Militar de Engenharia, com mestrado em Sistemas e Computação. Participa ainda do programa PROFMAT, do IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Autor de 60 livros nas áreas de Informática e Matemática.

■

Capítulo 2

Calcule rápido

Contas com os dedos?

Para fazer cálculos é preciso usar todo o poder do cérebro humano: *memória* e *raciocínio*. Usando memória sem raciocínio você não vai conseguir ir muito longe. Também se usar raciocínio sem memória vai ter grandes dificuldades.

Some rápido

Use uma folha de papel dobrada ou uma régua e tampe a coluna dos resultados. Faça cada cálculo de cabeça ou contando nos dedos e cronometre o tempo total para fazer o conjunto de contas.

E01) Tabela para treinamento de adição

Conta	Resultado
9+9	18
6+5	11
7+9	16
2+8	10
8+9	17
4+3	7
9+6	15
7+4	11
8+7	15
5+6	11
9+5	14
7+6	13
8+3	11
9+3	12
7+2	9
4+9	13
3+4	7
7+5	12
5+4	9
2+9	11
3+2	5
5+5	10
8+6	14
3+7	10
2+4	6
6+8	14
4+5	9

Conta	Resultado
8+5	13
3+4	7
9+7	16
4+3	7
7+8	15
6+6	12
9+8	17
7+7	14
3+9	12
6+7	13
5+4	9
6+9	15
3+3	6
5+8	13
5+9	14
2+3	5
8+2	10
9+4	13
4+7	11
8+8	16
4+2	6
9+2	11
8+4	12
5+7	12
2+7	9
4+8	12
7+3	10

Marque o tempo que você demora. O ideal é que chegue a menos de 60 segundos, o que corresponde a cerca de 1 segundo para cada cálculo. Pessoas que fazem contas com os dedos demoram vários minutos para fazer todas as contas. Para chegar a 2 minutos é preciso conseguir fazer a maior parte delas de cabeça, apesar do tempo ainda estar longo (cerca de 2 segundos cada conta). Repita o processo várias vezes até conseguir um tempo total na faixa de 60 segundos.

Menos de 1 minuto	Ótimo
De 1 a 2 minutos	Bom
De 2 a 3 minutos	Mais ou menos
De 3 a 4 minutos	Fraco
Acima de 4 minutos	Tá frito

“Tá frito” não é tão ruim assim, a menos que você precise fazer uma prova de matemática dentro de 30 minutos. Provavelmente não é esse o caso, você tem muito tempo para treinar e dominar a matemática.

O objetivo é chegar ao ótimo. Qualquer aluno, mesmo começando na escala “tá frito”, pode chegar ao ótimo se repetir o processo várias vezes. Você notará que a cada repetição, o seu tempo será menor. Isso é realmente necessário, pois quem demora a fazer essas contas vai encontrar imensas dificuldades para fazer cálculos mais complexos.

Atenção: A cada capítulo deste livro que você terminar de estudar, volte a este capítulo e faça novamente esse teste. Se o tempo aumentar, volte a treinar velocidade até conseguir novamente o seu menor tempo.

Subtraindo

E02) Tabela para treinamento de subtração

Conta	Resultado
19-9	10
11-6	5
16-7	9
10-2	8
17-8	9
7-4	3
15-9	6
11-7	4
15-8	7
11-5	6
14-9	5
13-7	6
11-8	3
12-9	3
9-7	2
13-4	9
7-3	4
12-7	5
9-5	4
11-2	9
5-3	2
10-5	5
14-8	6
10-3	7
6-2	4
14-6	8
9-4	5

Conta	Resultado
13-8	5
7-3	4
16-9	7
7-4	3
15-7	8
12-6	6
17-9	8
14-7	7
12-3	9
13-6	7
9-5	4
15-6	9
6-3	3
13-5	8
14-5	9
5-2	3
10-8	2
13-9	4
11-4	7
16-8	8
6-4	2
11-9	2
12-8	4
12-5	7
9-2	7
12-4	8
10-7	3

Procure chegar ao tempo de 1 minuto para fazer de cabeça todas as subtrações, ou seja:

Menos de 1 minuto	Ótimo
De 1 a 2 minutos	Bom
De 2 a 3 minutos	Mais ou menos
De 3 a 4 minutos	Fraco
Acima de 4 minutos	Tá frito

Multiplicando

Nos primeiros anos do ensino fundamental estudamos a multiplicação, decorando as tabuadas, que nada mais são que tabelas com os resultados das multiplicações de todos os números de 0 a 9.

1x1 = 1 1x2 = 2 1x3 = 3 1x4 = 4 1x5 = 5 1x6 = 6 1x7 = 7 1x8 = 8 1x9 = 9 1x10 = 10	2x1 = 2 2x2 = 4 2x3 = 6 2x4 = 8 2x5 = 10 2x6 = 12 2x7 = 14 2x8 = 16 2x9 = 18 2x10 = 20	3x1 = 3 3x2 = 6 3x3 = 9 3x4 = 12 3x5 = 15 3x6 = 18 3x7 = 21 3x8 = 24 3x9 = 27 3x10 = 30	4x1 = 4 4x2 = 8 4x3 = 12 4x4 = 16 4x5 = 20 4x6 = 24 4x7 = 28 4x8 = 32 4x9 = 39 4x10 = 40	5x1 = 5 5x2 = 10 5x3 = 15 5x4 = 20 5x5 = 25 5x6 = 30 5x7 = 35 5x8 = 40 5x9 = 45 5x10 = 50
6x1 = 6 6x2 = 12 6x3 = 18 6x4 = 24 6x5 = 30 6x6 = 36 6x7 = 42 6x8 = 48 6x9 = 54 6x10 = 60	7x1 = 7 7x2 = 14 7x3 = 21 7x4 = 28 7x5 = 35 7x6 = 42 7x7 = 49 7x8 = 56 7x9 = 63 7x10 = 70	8x1 = 8 8x2 = 16 8x3 = 24 8x4 = 32 8x5 = 40 8x6 = 48 8x7 = 56 8x8 = 64 8x9 = 72 8x10 = 80	9x1 = 9 9x2 = 18 9x3 = 27 9x4 = 36 9x5 = 45 9x6 = 54 9x7 = 63 9x8 = 72 9x9 = 81 9x10 = 90	10x1 = 10 10x2 = 20 10x3 = 30 10x4 = 40 10x5 = 50 10x6 = 60 10x7 = 70 10x8 = 80 10x9 = 90 10x10 = 100

Use a tabela abaixo para marcar o tempo. Se conseguir fazer em 1 minuto está bom, pode prosseguir com o livro, mas volte aqui para treinar novamente, até conseguir fazer em 30 segundos.

E03) Tabela para treinamento de multiplicação

Conta	Resultado
3x5	15
5x7	35
3x6	18
7x9	63
3x7	21
5x5	25
6x6	36
4x7	28
4x8	32
4x4	16
6x9	54
5x9	45
8x9	72
5x6	30

Conta	Resultado
5x8	40
4x6	24
6x7	42
6x8	48
3x9	27
7x8	56
8x8	64
3x3	9
9x9	81
3x4	12
4x9	36
3x8	24
7x7	49
4x5	20

Menos de 30 segundos	Ótimo
De 30 s a 1 min	Bom
De 1 a 1:30 min	Mais ou menos
De 1:30 min a 2 min	Fraco
Acima de 2 minutos	Tá frito

Divisão exata

Toda divisão exata é uma multiplicação feita “ao contrário”. Por exemplo, sabemos que 3x10=30. Então, se dividirmos 30 por 3, encontraremos 10. Se dividirmos 30 por 10, encontraremos 3. Complete então a tabela abaixo:

Multiplicação	Divisão
4x5=20	20 ÷ 5 =
3x5=15	15 ÷ 5 =
5x7=35	35 ÷ 5 =
3x9=27	27 ÷ 9 =
6x8=48	48 ÷ 6 =
3x6=18	18 ÷ 6 =
7x9=63	63 ÷ 7 =
3x3=9	9 ÷ 3 =
6x7=42	42 ÷ 6 =
3x7=21	21 ÷ 3 =
5x8=40	40 ÷ 8 =
4x9=36	36 ÷ 4 =
3x7=21	21 ÷ 7 =
5x5=25	25 ÷ 5 =
6x6=36	36 ÷ 6 =
3x8=24	24 ÷ 3 =
4x7=28	28 ÷ 7 =
6x9=54	54 ÷ 6=
7x8=56	56 ÷ 8 =
3x4=12	12 ÷ 3 =
6x8=48	48 ÷ 8 =
5x9=45	45 ÷ 5 =
8x9=72	72 ÷ 8 =
5x6=30	30 ÷ 6 =
4x6=24	24 ÷ 6 =

Multiplicação	Divisão
5x8=40	40 ÷ 5 =
4x6=24	24 ÷ 4 =
5x9=45	45 ÷ 9 =
4x8=32	32 ÷ 4 =
3x5=15	15 ÷ 3 =
6x7=42	42 ÷ 7 =
4x7=28	28 ÷ 4 =
3x9=27	27 ÷ 3 =
6x9=54	54 ÷ 9 =
7x8=56	56 ÷ 7 =
5x6=30	30 ÷ 6 =
8x8=64	64 ÷ 8 =
9x9=81	81 ÷ 9 =
3x4=12	12 ÷ 4 =
4x9=36	36 ÷ 9 =
3x6=18	18 ÷ 3 =
4x8=32	32 ÷ 8 =
8x9=72	72 ÷ 9 =
5x7=35	35 ÷ 7 =
4x4=16	16 ÷ 4 =
3x8=24	24 ÷ 8 =
7x7=49	49 ÷ 7 =
4x5=20	20 ÷ 4 =
7x9=63	63 ÷ 9 =

Como vemos, para saber fazer uma divisão exata é preciso conhecer muito bem a tabela de multiplicação, já que a divisão nada mais é que a operação inversa da multiplicação. Assim como ocorre nas outras operações, você também precisa memorizar os resultados para que faça cálculos com maior facilidade e velocidade. Faça então o treinamento abaixo.

E04) Tabela para treinamento de divisão

Conta	Resultado
$20 \div 5$	4
$15 \div 5$	3
$35 \div 5$	7
$27 \div 9$	3
$48 \div 6$	8
$18 \div 6$	3
$63 \div 7$	9
$9 \div 3$	3
$42 \div 6$	7
$21 \div 3$	7
$48 \div 8$	6
$36 \div 4$	9
$21 \div 7$	3
$25 \div 5$	5
$36 \div 6$	6
$24 \div 3$	8
$28 \div 7$	4
$54 \div 6$	9
$56 \div 8$	7
$12 \div 3$	4
$48 \div 8$	6
$45 \div 5$	9
$72 \div 8$	9
$30 \div 6$	5
$24 \div 6$	4

Conta	Resultado
$40 \div 5$	8
$24 \div 4$	6
$45 \div 9$	5
$32 \div 4$	8
$15 \div 3$	5
$42 \div 7$	6
$28 \div 4$	7
$27 \div 3$	9
$54 \div 9$	6
$56 \div 7$	8
$30 \div 6$	5
$64 \div 8$	8
$81 \div 9$	9
$12 \div 4$	3
$36 \div 9$	4
$18 \div 3$	6
$32 \div 8$	4
$72 \div 9$	8
$35 \div 7$	5
$16 \div 4$	4
$24 \div 8$	3
$49 \div 7$	7
$20 \div 4$	5
$63 \div 9$	7

Use a tabela para avaliar seus resultados. O ideal é que fique entre 1 e 2 minutos, mas exercite bastante até chegar próximo de 1 minuto.

Menos de 1 minuto	Ótimo
De 1 a 2 minutos	Bom
De 2 a 3 minutos	Mais ou menos
De 3 a 4 minutos	Fraco
Acima de 4 minutos	Tá frito

■

Capítulo 3

Números

Número e numeral

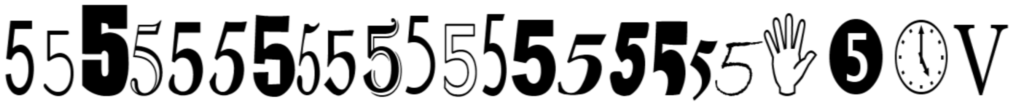
O número é um objeto da matemática, uma ideia que representa uma quantidade. O numeral é uma representação concreta do número, normalmente visual. Vejamos um exemplo:

“Escreva o número 5”

Não dá para escrever o número 5, pois ele é um objeto da matemática que não existe no universo físico. Seria quase a mesma coisa que pedido “desenhe uma saudade”. Por outro lado, se for pedido:

“Escreva o numeral 5”

Agora sim isso pode ser feito, e de várias formas, por exemplo:



Toda vez que vemos algum tipo de representação do que parece ser um número, na verdade não é um número, e sim, um numeral. É força do hábito, chamar erradamente os numerais de números, até em livros de matemática. Mas é preciso que você saiba os nomes corretos e procure usá-los sempre, e lembre-se deles ao realizar provas.

Algarismos

Algarismos são símbolos usados para representar os numerais. No Brasil e na maioria dos países, os algarismos usados são:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Conjunto

Conjunto é uma coleção de objetos. O capítulo 10 é dedicado ao assunto, mas precisaremos usar algumas noções antes disso. Uma das formas de representar um conjunto é enumerar os objetos, separados por vírgulas, e compreendidos entre chaves {}. Isso é chamado de *enumerar* o conjunto. Por exemplo:

P = {Mercúrio, Vênus, Terra, Marte} – Conjunto dos 4 planetas mais próximos do nosso Sol
M = {polegar, indicador, médio, anular, mínimo} – Conjunto dos dedos da mão
T = {Botafogo, Flamengo, Vasco } – Conjunto de 3 times do Rio de Janeiro
A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} – Conjunto dos algarismos do sistema decimal de numeração
Ø = { } – Conjunto vazio
V = {a, e, i, o, u} – Conjunto das vogais

Os objetos que formam um conjunto são chamados de *elementos*. Os elementos devem ser *diferentes* e *não ordenados*. Por exemplo, {a, b, c} é o mesmo que {b, c, a}, pois entre os elementos de um conjunto, não importa a ordem. Da mesma forma, {a, a, b, c} é o mesmo que {a, b, c}, pois repetições são ignoradas.

Existem *conjuntos finitos* e *conjuntos infinitos*. Os exemplos de conjuntos que apresentamos acima são finitos. Um exemplo de conjunto infinito é o conjunto dos números inteiros maiores que zero. Este conjunto é:

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ... }

Usamos reticências (...) para indicar que o conjunto continua até o infinito.

Quando um elemento faz parte de um conjunto, dizemos que ele *pertence* ao conjunto. Para dizer que um elemento x pertence a um conjunto A, usamos a notação:

$$x \in A$$

Por exemplo, se o conjunto A = {1, 3, 5, 7, 9, 11}, podemos escrever $1 \in A$, $3 \in A$, etc.

Conjunto dos números naturais

Os conjuntos têm inúmeras propriedades interessantes. O assunto é muito importante na matemática, e é bastante cobrado em provas e concursos. Deixaremos entretanto o seu estudo para o capítulo 10. Nosso interesse agora é apresentar um conjunto muito importante, que é o *conjunto dos números naturais*. Este conjunto é em geral representado pela letra N maiúscula,

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ...}

Como vemos N é o conjunto de todos os números inteiros não negativos. É um conjunto infinito, mas existem outros infinitos números que não fazem parte de N. Por exemplo, o número 1,37 não pertence a N, pois não é um número inteiro. Um outro exemplo, -4 não pertence a N, pois é um número negativo.

Um outro conjunto derivado de N é chamado N*:

N* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ...}

Sucessor e antecessor

Considerando que os números naturais formam uma sequência crescente, dizemos que o sucessor de um número é aquele número que vem logo depois. Por exemplo, o sucessor de 20 é 21. O antecessor de 20 é 19. O sucessor de 0 é 1, o antecessor de 0 não existe no conjunto dos números naturais.

Números consecutivos

Dizemos que dois ou mais números são consecutivos quando, colocados em ordem crescente, formam uma sequência completa, do menor para o maior. O caso mais simples é quando temos um número natural e o seu sucessor. Por exemplo, 15 e 16 são dois números naturais consecutivos. Podemos ter mais de dois números, por exemplo, 20, 21, 22 e 23 são números naturais consecutivos.

Valor absoluto e valor relativo

Valor absoluto é o número que um algarismo representa quando usado sozinho. Por exemplo, no numeral 328, o valor absoluto do algarismo 2 é 2. Já o valor relativo é aquele que o algarismo representa levando em conta a sua posição no numeral. Por exemplo, em 328, o valor relativo de o algarismo 2 é 20. O valor relativo de 3 é 300, o valor relativo de 8 é 8 mesmo.

Exemplo: No numeral 1467893, qual é o algarismo de maior valor relativo? A resposta é: o algarismo 1, pois tem o valor de 1000000 (1 milhão).

Exercícios

E1) Escreva o conjunto dos numerais pares de 2 algarismos, de tal forma que esses dois algarismos sejam iguais.

E7) Escreva o conjunto formado pelos sucessores dos números primos menores que 10.

E11) O valor relativo de um algarismo nas unidades de milhar é sempre maior que o valor absoluto de um algarismo que está nas unidades simples?

E13) Qual é a diferença entre o conjunto N e o conjunto N* ?

E17) Escreva uma sequência de 6 números pares consecutivos que termine em 64

Classes e ordens

Numerais muito extensos ficam difíceis de ler, por exemplo, 32567295. Para facilitar a leitura, convenciona-se usar pontos para separar os numerais, de 3 em 3 algarismos. O numeral 32567295 pode então ser escrito na forma 32.567.295. Os grupos são separados a partir da direita. Cada grupo é chamado de classe. No nosso exemplo, o grupo 295 é chamado “classe das unidades”, o grupo 567 é chamado “classe dos milhares” e o grupo 32 é chamado “classe dos milhões”. As classes seguintes são bilhões, trilhões, quadrilhes, quintilhões, sextilhões, etc. Cada classe, com seus três algarismos, é dividida em três ordens: unidades, dezenas e centenas (da direita para a esquerda).

<table>
<tr><td rowspan="3">Classe das unidades</td><td rowspan="3">295</td><td>5</td><td>Ordem das unidades</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Ordem das dezenas</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Ordem das centenas</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Classe dos milhares</td><td rowspan="3">567</td><td>7</td><td>Ordem das unidades de milhar</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Ordem das dezenas de milhar</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Ordem das centenas de milhar</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Classe dos milhões</td><td rowspan="3">32</td><td>2</td><td>Ordem das unidades de milhão</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Ordem das dezenas de milhão</td></tr>
<tr><td>-</td><td>Ordem das centenas de milhão</td></tr>
</table>

Numerais romanos

Os algarismos que usamos hoje em quase todo o mundo (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9) são chamados “arábicos”, ou “indo-arábicos”. Há muitos séculos foram adotados também pelos países ocidentais. Antes disso, eram usada a representação romana. Hoje os numerais romanos não são mais usados para cálculos, porém ainda aparecem em diversas situações, como por exemplo, em relógios, numeração de leis e contratos, numeração de capítulos de livros, etc. Ainda são exigidos em provas e concursos. Em linhas gerais, o que o aluno precisa saber fazer é a conversão entre numerais romanos e arábicos. Os numerais romanos usam letras do alfabeto latim como algarismos. São elas:

Romano	Arábico
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

Para formar numerais romanos, formamos as unidades, dezenas, centenas, depois unidades de milhar, dezenas de milhar, e assim por diante, da direita para a esquerda. As unidades são formadas de acordo com a tabela abaixo:

1 = I 2 = II 3 = III 4 = IV 5 = V	6 = VI 7 = VII 8 = VIII 9 = IX

A regra para formar dezenas é a mesma:

10 = X 20 = XX 30 = XXX 40 = XL 50 = L	60 = LX 70 = LXX 80 = LXXX 90 = XC

O mesmo vale para a formação das centenas:

100 = C 200 = CC 300 = CCC 400 = CD 500 = D	600 = DC 700 = DCC 800 = DCCC 900 = CM

A partir de 1000 é usado o símbolo M, mas como não existe símbolo para 5.000, é usado $\overline{\mathrm{V}}$. A barra sobre o símbolo indica que está multiplicado por 1000.

1000 = M	6000 = $\overline{\text{VI}}$
2000 = MM	7000 = $\overline{\text{VII}}$
3000 = MMM	8000 = $\overline{\text{VIII}}$
4000 = $\overline{\text{IV}}$	9000 = $\overline{\text{IX}}$
5000 = $\overline{\text{V}}$	10000 = $\overline{\text{X}}$

Para formar, por exemplo, o numeral 2745 em romano, combinamos 2000 (MM), mais 700 (DCC), mais 40 (XL), mais 5 (V), ficando com MMDCCXLV. O mais comum nos concursos é a operação inversa, ou seja, converter numeral romano para arábico. Por exemplo, MCMLXXXVI é:

M =1000
CM = 900
LXXX = 80
VI =6

MCMLXXXVI = 1986.

Exercícios

E21) Escreva em numerais romanos: 734
E23) Escreva em numerais romanos: 999
E25) Escreva em numerais indo-arábicos: MMDCCCLXXXVIII
E27) Escreva por extenso: 11.049.028
E29) Quanto vale 10^3 x 10^2?

E31) O que está errado na frase: “Minha calculadora faz quatro operações: soma, subtração, multiplicação e divisão”?

E33) Escreva o numeral romano MCMLXXXIX usando algarismos indo-arábicos.

E39) O algarismo 6 aparece duas vezes no numeral 276.861. Considerando os valores relativos desses dois algarismos, um deles é quantas vezes maior que o outro?

E43) Contando de 10 em 10, começando em 10 e indo até 1000, quantos algarismos usaremos?

E45) Considerando o problema anterior, quantas vezes aparecerá cada algarismo?

E49) Qual é a diferença entre os valores relativos do algarismo 3 nos numerais 32.768 e 16.132?

E51) Qual é a diferença entre os valores relativos dos algarismos 2 e 7 no numeral 32.768?

E52) Qual é a diferença entre os valores absolutos dos algarismos 8 e 4 no numeral 84.215? E no numeral 124.678?

E55) Escreva o conjunto dos números primos compreendidos entre 10 e 20.

E57) Quanto vale a soma dos valores absolutos do algarismos do numeral 5.328.117?

E65) Determine os três próximos números da sequência:
1, 4, 9, 16, 25, 36...

E67) Escreva quais são os 10 algarismos indo-arábicos e os 10 algarismos romanos

E71) Quantos algarismos são necessários para escrever os 50 primeiros números naturais a partir de 1?

E75) Ao escrever os números naturais de 1 a 537, quantas vezes aparecerá o algarismo 4?

E77) Qual número aumenta 144 unidades quando acrescentamos um zero à sua direita?

E81) Escrevendo números naturais a partir de 1, qual algarismo ocupará o 100º lugar?

E83) Quantos algarismos são necessários para escrever todos os números pares de 8 até 220?

Questões resolvidas

Q1) Quantos algarismos são usados para escrever todos os numerais de 200 a 500?

Solução:
Todos os numerais de 200 a 500 têm 3 algarismos. Então basta saber quantos numerais existem entre 200 e 500 (inclusive) e multiplicar o resultado por 3. Um erro muito comum aqui é calcular a diferença entre o número final e o inicial, seria 500-200=300. Entretanto quando calculamos somente a diferença, não estamos contanto o primeiro número. Seria preciso adicionar 1 ao resultado, seria então 301. O número de algarismos usados seria 301x3=903.

Reposta: 903 algarismos

Q2) Quantos algarismos são usados para escrever todos os numerais de 80 até 150?

Solução:
Serão escritos numerais de 2 (80 a 99) e de 3 algarismos (100 a 150).
Numerais de 2 algarismos: 99-80+1 = 20; serão usados 20 x 20 = 40 algarismos
Numerais de 3 algarismos: 150-100+1 = 51; serão usados 51 x 3 = 153 algarismos
Ao todo serão 40 + 153 = 193 algarismos.

Resposta: 193 algarismos

Q3) Quantos algarismos são usados para escrever todos os numerais, de 900 a 1100?

Solução:
Serão escritos numerais de 3 (900 a 999) e de 4 algarismos (1000 a 1100).
Numerais de 3 algarismos: 999-900+1 = 100; serão usados 100x3 = 300 algarismos
Numerais de 4 algarismos: 1100-1000+1 = 101; serão usados 101x4 = 404 algarismos
Ao todo serão usados 300+404 = 704 algarismos

Resposta: 704 algarismos

Q5) Escrevemos sucessivamente os números naturais a partir de 1, até usarmos ao total, 1200 algarismos. Até qual número escrevemos?

Solução:
É preciso verificar até onde podemos escrever com os algarismos disponíveis:
Com 1 algarismo (1 a 9) ➔ 9 x 1 = 9 algarismos
Com 2 algarismos (10 a 99) ➔ 99-10+1 = 90; usados 90x2 = 180, até agora usamos 189

Não dá para escrever de 100 até 999, pois para isso gastaríamos mais 2700 algarismos. É preciso saber até onde podemos chegar com os algarismos restantes.

Usamos até aqui 189 algarismos. Dos 1200 disponíveis, restam 1200-189 = 1011 algarismos, com os quais podemos escrever 1011/3 = 337 algarismos. Já tínhamos chegado até 99, agora escreveremos mais 337 numerais, então o último será 99+337 = 436.

Resposta: Até o número 436.

Q7) Qual é o valor relativo de 5 no numeral 35.250?

Solução:
Existem dois algarismos 5. O primeiro está na cada das unidades de milhar, seu valor relativo é 5.000. O segundo está na casa das dezenas simples, seu valor relativo é 50.

Resposta: 5000 e 50.

Questões propostas

Q33) (CM) Observe a seguinte frase: "O Rei Fernando CMXCIX realizou grandes festivais". Ao se transformar o numeral romano sublinhado em indo-arábico, obtém-se o número natural N. Determine o produto dos algarismos de N.

(A) 27 (B) 629 (C) 729 (D) 829 (E) 999

Q35) (CM) Marcela possui uma grande quantidade de adesivos com os algarismos 0, 1, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. No entanto, ela só dispõe de vinte e dois adesivos com o algarismo 2 e quinze adesivos com o algarismo 3. Até que número Marcela poderá numerar as páginas do seu novo diário usando os adesivos dos algarismos que dispõe?

(A) 119 (B) 112 (C) 62 (D) 52 (E) 43

Q37) (CM) Um calígrafo cobra, para numerar as páginas do original de uma obra, a quantia de R$ 0,85 por cada algarismo que escreve. Para numerar uma obra, desde a página 115 até a página 1115, ele cobrará:

(A) R$ 850,85 (B) R$ 849,15 (C) R$ 2.645,20 (D) R$ 2.651,15 (E) R$ 850,00

Q39) (CM) Um pintor recebeu a quantia de R$ 62,10 (sessenta e dois reais e dez centavos) para enumerar todas as salas de aula do Colégio Militar de Brasília. Para tanto, o pintor cobrou a quantia de R$ 0,05 (cinco centavos) por algarismo pintado. Quantas salas de aula há no colégio?

(A) 351 (B) 450 (C) 456 (D) 1053 (E) 1242

Q41) (CM) Transformando-se o numeral romano $\overline{\overline{VI}}\,\overline{XL}XXXI$ em indo-arábico, obtém-se o número A. O produto dos algarismos de A é igual a

(A) 0 (B) 14 (C) 7440 (D) 7441 (E) 6040031

Q43) (CM) Quantos são os números que obedecem às seguintes condições:
São formados por três algarismos;
São compostos com os números 4, 5 e 6;

Não têm repetição de algarismo na representação dos números.

(A) Três (B) Quatro (C) Cinco (D) Seis (E) Sete

Q45) (CM) O número da casa da Evanice tem três algarismos. O produto deles é 90 e a soma dos dois últimos é 7. Os algarismos das centenas desse número é

(A) 2 (B) 3 (C) 9 (D) 7 (E) 6

Q47) (CM) Seja o numeral 222.222.222. Dividindo o valor relativo do algarismo da dezena de milhar pelo quíntuplo do valor absoluto do algarismo da dezena simples, obtemos como resultado:

(A) 1/5 (B) 1/50 (C) 2.000 (D) 200.000 (E) 2.000.000

Q51) (CM) O número de resultados diferentes que podemos obter somando dois números diferentes de 1 a 50 é:

(A) 100 (B) 99 (C) 98 (D) 97 (E) 96

Q57) (CM) Usando os algarismos 2, 4, 8 e 6 e sem repeti-los podemos escrever quantos numerais diferentes de quatro algarismos?

(A) 12 (B) 64 (C) 32 (D) 256 (E) 24

Respostas dos exercícios

E1) {22, 44, 66, 88}
E7) {3, 4, 6, 8}
E11) Não. Veja por exemplo o número 10.645. O valor relativo do 0 é 0, o valor absoluto do 5 é 5, que é maior que 0.
E13) A diferença é o número 0, que pertence a N mas não pertence a N*.
E17) 54, 56, 58, 60, 62, 64
E21) DCCXXXIV
E23) CMXCIX
E25) 2.888
E27) Onze milhões, quarenta e nove mil e vinte e oito
E29) $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$
E31) O nome da operação é *adição*, e não soma.
E33) 1989
E39) 100
E43) 291
E45) 0: 96 vezes; 1 a 8: 18 vezes cada; 9: 8 vezes
E49) 29970
E51) 1300
E52) 4 e 4
E55) 11, 13, 17, 19
E57) 27
E65) Resp: 49, 64, 81
E67) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, I, V, X, L, C, D, M
E71) R: 91
E75) R: 204
E77) R: 16

E81) R: 5
E83) R: 274

Respostas das questões propostas

Q33) Resposta: (E)
Q35) Resposta: (E)
Q37) Resposta: (D)
Q39) Resposta: (B)
Sugestão: primeiro calcule quantos algarismos foram pintados, dividindo o gasto total pelo custo de cada algarismo.
Q41) Resposta: (A)
Q43) Resposta: (D)
Q45) Resposta: (C)
Q47) Resp (C)
Q51) Resp: (D)
Q57) Vejamos primeiro os que começam com 2
2468, 2486, 2648, 2684, 2864, 2846: total=6
Agora os que começam com 4 serão mais 6, os que começam com 6 são mais 6, os que começam com 8 são mais 6. O total é 24.
Resp: (E) 24

Q70) Resposta: (B)
Q71) Resposta: (D)
Q72) Resposta (A)
Q73) Resposta: (D)
Q74) R 396
Q75) Resposta: (D) 18

■

Obtenha a versão mais recente em www.laercio.com.br

MATEMÁTICA PARA VENCER, versão de 132 páginas

Capítulo 4

As 4 operações

Os nomes dos termos das operações

Já vimos que é importante conhecer os nomes de todos os elementos de qualquer disciplina, e no nosso caso, da matemática. As operações matemáticas citadas aqui são ditas *operações binárias*, pois operam com dois números. Esses dois números são chamados *operandos*. Depois que a operação é realizada com os operandos, termos o *resultado* da operação. Convencionou-se chamar os operandos e o resultado de uma operação de *termos*.

Termos da adição

A adição tem três termos: os dois operandos e o resultado. Os dois operandos são chamados de *parcelas*. Podemos chamá-los respectivamente de *primeira parcela* e *segunda parcela*. O outro termo é o resultado da operação de adição, chamado *soma* ou *total*.

Exemplo:

10	Primeira parcela
+20	Segunda parcela
30	Soma ou total

Termos da subtração

Em uma operação de subtração, os termos têm papéis diferentes. O primeiro termo é aquele do qual será diminuído o valor dado pelo segundo termo. O primeiro termo é chamado de *minuendo*, o segundo termo é chamado de *subtraendo*. O terceiro termo é o, resultado é chamado de *resto* ou *diferença*.

Exemplo:

40	Minuendo
-30	Subtraendo
10	Resto ou diferença

Termos da multiplicação

Os dois primeiros termos da multiplicação são chamados *fatores*. Para diferenciar, é correto chamá-los de *primeiro fator* e *segundo fator*. Esses dois fatores também podem ser chamados de *multiplicando* e *multiplicador*. O terceiro termo é o resultado, chamado *produto*.

Exemplo:

$$\begin{array}{rl} 6 & \text{Primeiro fator ou multiplicando} \\ \times\ 7 & \text{Segundo fator ou multiplicador} \\ \hline 42 & \text{Produto} \end{array}$$

Termos da divisão

Podemos encontrar três tipos de divisão:
a) Divisão exata em N
Ocorre quando o primeiro número (chamado *dividendo*) é um múltiplo do segundo número (chamado *divisor*). A divisão é exata, ou seja, não deixa resto. O resultado da divisão é chamado *quociente*.

Ex:
20÷4 = 5
Em outras palavras, se tivermos 20 objetos e dividirmos esses objetos em 4 grupos iguais, cada grupo ficará com exatamente 5 objetos, sem sobrar objeto algum.

$$\begin{array}{rl} 20 & \text{Dividendo} \\ \div\ 4 & \text{Divisor} \\ \hline 5 & \text{Quociente} \end{array}$$

Em qualquer divisão exata, vale a fórmula:

divisor x quociente = dividendo

b) Divisão em N com resto
Na maioria das vezes, as divisões não são exatas, ou seja, sobra um resto.

Ex: 23÷4

Ao tentarmos distribuir 23 objetos em 4 grupos, concluiremos que cada grupo ficará com 5 objetos, entretanto, sobrarão 3 objetos. Este número de objetos que sobram é chamado de *resto*. Então 23÷4 resulta em 5, e deixa resto 3.

$$\begin{array}{rl} 23 & \text{Dividendo} \\ \div\ 4 & \text{Divisor} \\ \hline 5 & \text{Quociente} \\ \hline \text{Sobram } 3 & \text{Resto} \end{array}$$

OBS: A divisão exata é aquela em que o resto vale 0.

Operações com números naturais

As quatro operações citadas aqui são aplicadas aos números naturais, ou seja, pertencentes ao conjunto infinito:

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

Os números a serem operados podem ser a princípio quaisquer números naturais, entretanto há algumas exceções:

A) Subtração:
Para que o resultado da subtração também seja um número natural, é preciso que o minuendo seja maior, ou então igual ao subtraendo. É válido portanto usar operações como 5-2, 100-30, 40-25, 20-20, etc. Não seria válido usar, em N, operações como 3-7. O cálculo pode ser feito, mas seu resultado é -4, que não é um número natural.

B) Divisão:
A primeira restrição é que o divisor nunca pode ser zero. Fora isso, o dividendo e o divisor podem ser quaisquer. Como estamos levando em conta que a divisão pode deixar resto, Tanto o dividendo como o divisor podem ser quaisquer. Quando a divisão não é exata, temos um resto diferente de zero.

C) Adição:
Não existe restrição alguma sobre as parcelas de uma adição. Ambas as parcelas podem ser números naturais quaisquer, e o resultado será sempre um número natural.

D) Multiplicação:
Também nesse caso, não existe restrição alguma sobre os fatores de uma multiplicação. Podem ser números naturais quaisquer, e o resultado será sempre um número natural.

Exercícios

E1) Além da multiplicação, divisão e subtração, qual é a outra operação aritmética básica?

E2) Explique o que é soma e o que é adição

E3) Quais são os nomes dos termos da subtração?

E4) Qual é a diferença entre divisão exata e divisão inexata?

E5) Cite três propriedades da adição

E6) Quando dizemos que Ax(B+C) = AxB + AxC, estamos usando qual propriedade?

E7) Como A÷1 = A, é correto dizer que 1 é elemento neutro da divisão?

E8) Quais são os nomes dos termos da divisão?

E9) Entre as quatro operações básicas, quais são as únicas duas que têm propriedade de fechamento?

E10) Um número ímpar pode ser decomposto na soma de dois outros números ímpares?

Expressões com as quatro operações

Em praticamente todas as provas de matemática são cobradas expressões numéricas. Uma das primeiras expressões numéricas que uma criança aprende é:

1+1

Depois disso vêm adições com numerais de 1 a 9, depois com números maiores, com subtrações, multiplicações e divisões. Por exemplo:

Calcule:
7x8

Com as crianças já mais “crescidinhas”, aparecem expressões um pouco mais complicadas. Por exemplo:

3x3+2x4

Uma expressão como esta pode deixar margem a dúvida. Poderíamos pensar que o cálculo é feito assim:
3x3 são 9; 9+2 são 11; 11x4 são 44

Convenciona-se na matemática que as multiplicações e divisões devem ser feitas antes das adições e subtrações. Então a sequência para resolução da expressão do nosso exemplo é:

3x3 + 2x4 =
9 + 8 =
17

O mesmo se aplica a expressões maiores, como:

3x8 – 2x5 +4x3 – 20÷4 =
24 – 10 + 12 – 5 =
14 +12 – 5 =
26 – 5 =
21

As adições e subtrações são feitas na ordem em que aparecem. Multiplicações e divisões também devem ser feitas na ordem em que aparecem. Por exemplo:

120÷10x2

Um aluno distraído poderia pensar que o cálculo a ser feito é 120÷20 = 6 (fez a multiplicação primeiro), mas não é assim. Multiplicações e divisões são feitas na ordem em que aparecem, portanto o correto é:

120÷10x2 =
12 x 2 = 24

Fazemos primeiro a divisão, que resulta em 12. Depois multiplicamos o resultado por 2. A regra geral para resolver este tipo de expressão é:

Multiplicações e divisões são feitas primeiro, na ordem em que aparecem. Depois são feitas as adições e subtrações, também na ordem em que aparecem.

Expressões com parênteses

Digamos que na expressão 3x3+2x4

seja nossa intenção fazer primeiro a adição (3+2), para depois fazer as multiplicações. Se fizermos isso na expressão como está, erraremos o resultado. A adição só é feita antes quando é colocada entre parênteses, assim:

3x(3+2)x4

Os parênteses servem para indicar que uma operação deve ser feita antes das outras. Neste exemplo, a adição deve ser feita primeiro. O cálculo da expressão ficaria assim:

3x(3+2)x4 =
3 x 5 x 4 =
15 x 4 =
60

Sempre que uma expressão tiver parênteses, o valor entre parênteses deve ser calculado antes. Vejamos um outro exemplo:

120÷(10x2)

Se a expressão não tivesse parênteses, deveríamos realizar a divisão primeiro, e a multiplicação depois. Com os parênteses, esta ordem é alterada:

120÷(10x2) =
120÷20 = 6

Colchetes e chaves

É permitido nas expressões matemáticas, ter parênteses dentro de parênteses. Por exemplo:

50 x (30 ÷ (2+4))

Nesta expressão foram usados dois níveis de parênteses. O (2+4) indica que esta adição deve ser feita antes da divisão. Os parênteses em torno da expressão (30÷(2+4)) indicam que esta divisão deve ser feita antes da multiplicação por 50. O ordem de cálculo correta é a seguinte:

50 x (30 ÷ (2+4)) =
50 x (30 ÷ 6) =
50 x 5 =
250

Para evitar confusão, toda vez que for preciso usar parênteses dentro de parênteses (ou dois níveis de parênteses), convenciona-se substituir os parênteses mais externos por *colchetes*, que são os símbolos [e].

50 x [30 ÷ (2+4)]

Matematicamente, os colchetes têm a mesma função que os parênteses, mas são usados apenas para facilitar a leitura. Como os parênteses ficam mais internos que os colchetes, devemos sempre resolver primeiro as operações entre parênteses, e depois que os parênteses forem eliminados, resolver primeiro o que está entre colchetes.

Quando é necessário usar três níveis de parênteses, usamos para o nível mais externo, as chaves, que são os símbolos { e }. Devemos resolver primeiro o que está entre parênteses, depois o que está entre colchetes, e depois o que está entre chaves.

Exercícios

E11) Calcule a expressão 5.(4x17-8x8)

E13) Calcule (2x3+3x4+4x5+5x6)÷(1+4x4)

E14) Calcule 1+2.{3+4.[5+6.(8+8÷4)]}

E15) Calcule 10x9-8x7+6x5-4x3

E16) Calcule 720÷6÷5÷4÷3÷2

E18) Calcule 10x3x5 e 10x(3x5)

E19) Calcule 20-8-6 e 20-(8-6)

E21) (36-10).(2+3)

E22) 36-10.2+3

E23) 2+2x2+2x2+2x2

E24) (2+2)x2+2x(2+2)x2

E26) Calcule [5x(20x5+3) -15:3+2] : 8

E27) Calcule 13x13-12x12-4x4-3x3

E29) Calcule 1+{2.[3+4.(5+6.7)]}

Problemas envolvendo os termos das operações

As operações aritméticas possuem algumas propriedades interessantes relativas a alterações nos seus termos. Por exemplo, quando somos o mesmo valor ao minuendo e ao subtraendo de uma subtração, o resultado não se altera. Por exemplo, partindo de 50-30=20, vamos somar 5 ao minuendo e ao subtraendo. Ficamos então com 55-35, que também dá como resultado, 20. Este e as outras propriedades listadas abaixo são na verdade consequências das demais propriedades já citadas (associativa, comutativa, distributiva, etc.).

Propriedades dos termos da adição

1) Quando somamos um valor a um dos termos de uma adição, a soma é aumentada no mesmo valor.
Ex:
10+20=30
11+20=31 (aumentando de 1 a primeira parcela)
10+22=32 (aumentando de 2 a segunda parcela)

2) Quando subtraímos um valor de um dos termos de uma adição, a soma é diminuída do mesmo valor.
Ex:
10+20=30
8+20=28 (diminuindo 2 da primeira parcela)
10+17=27 (diminuindo 3 da segunda parcela)

3) Quando somamos um mesmo valor às duas parcelas de uma adição, a soma aumenta em duas vezes este valor.
Ex:
10+20 = 30
11+21 = 32 (aumentamos 1 na primeira e na segunda parcela)

4) Quando somamos e subtraímos o mesmo valor às duas parcelas de uma adição, o resultado não se altera.
Ex:
10+20=30
12+18=30 (aumentamos 2 na primeira e diminuímos 2 da segunda parcela)

5) Quando multiplicamos as duas parcelas de uma adição por um mesmo valor, a soma também é multiplicada por este valor.
Ex:
10+20=30
100+200=300 (multiplicamos as duas parcelas por 10)

Propriedades dos termos da subtração

1) Quando somamos um mesmo valor ao minuendo e ao subtraendo de uma subtração, o resultado não se altera.
Ex:
50-20 = 30
55-25 = 30

2) Quando multiplicamos o minuendo e o subtraendo de uma subtração por um mesmo valor, o resultado também é multiplicado por este valor.
Ex:
30-20=10
300-200=100

3) Quando o minuendo aumenta e o subtraendo é mantido, o resto aumenta na mesma quantidade. Quando o minuendo diminui e o subtraendo é mantido, o resto diminui na mesma quantidade.
Ex:
13-5=8
15-5=10 (minuendo e resto aumentaram em 2)
11-6=6 (minuendo e resto diminuíram em 2).

4) Quando o subtraendo aumenta e o minuendo é mantido, o resto diminui na mesma quantidade. Quando o subtraendo diminui e o minuendo é mantido, o resto aumenta na mesma quantidade.
Ex:
26-10=16
26-12=14 (subtraendo aumenta 2, resto diminui 2)
26-8 = 18 (sobrando diminui 2, resto aumenta 2)

Propriedades dos termos da multiplicação

1) Quando multiplicamos e dividimos os termos de uma multiplicação por um mesmo valor, o resultado não se altera.

Ex:
12 x 5 = 60
6 x 10 = 60

2) Quando multiplicamos um dos fatores de uma multiplicação por um valor, o produto fica multiplicado por este valor.
Ex:
4x5 = 20
12x5 = 60 (ao multiplicarmos o 4 por 3, o produto também ficou multiplicado por 3).

3) Qualquer número multiplicado por 0 é igual a 0.

Propriedades dos termos da divisão

1) Em uma divisão sem resto, quando multiplicamos o dividendo e o divisor por um mesmo valor, o quociente não se altera.
Ex:
60÷5 = 12
120÷10 = 12

2) Em uma divisão com resto, vale sempre a seguinte fórmula:

D=d.q + r
D= Dividendo
d = divisor
q = quociente
r = resto

Ex: 67÷12 = 5, resto 7
67 = 12x5 + 7

3) O menor resto que uma divisão pode ter é 0.

4) O resto será no máximo igual a d-1, onde d é o divisor.

5) Qualquer número dividido por 1 é igual a próprio número.

6) Divisão de um produto – Para dividir um produto de números naturais por um outro número natural, basta dividir qualquer um dos números do produto pelo divisor (é preciso que seja divisão exata, sem resto), e manter a multiplicação deste resultado pelos outros números que estão sendo multiplicados.

Ex: (10x20x30)÷6
Vemos que pode ser feita a divisão exata de 30 por 6, que resulta em 5. Então a expressão fica:
10x20x5 = 1000

É mais rápido fazer assim que multiplicar 10x20x30 para depois dividir por 6.

Exercícios

E31) O que acontece com o resultado de uma adição quando multiplicamos suas parcelas por 10?

E32) O que acontece com o resultado de uma multiplicação quando multiplicamos suas duas parcelas por 5?

E33) O que acontece com o resultado de uma subtração quando multiplicamos o minuendo e o subtraendo por 6?

E34) O que acontece com o resultado de uma subtração quando somamos 1 às suas duas parcelas?

E35) Nas quatro operações aritméticas básicas, quais são os valores do segundo termo para que o resultado seja igual ao primeiro termo?

E36) Em uma divisão, o quociente é 13 e o resto é 7. Multiplicamos o dividendo e o divisor por 5. Qual será o novo quociente e o novo resto?

E37) Em uma divisão na qual o divisor é 15, qual é o maior valor possível que o resto pode ter?

E38) Em uma multiplicação, um dos fatores foi aumentado de uma unidade, e o produto, que antes era 72, passou a ser 80. Quais eram os fatores da multiplicação original?

E39) Dois números naturais, ao serem somados resultam em 8, e multiplicados resultam em 15. Quais são esses dois números?

Exercícios

E41) Calcule 348 x 8
E42) Calcule 734 x 92
E43) Calcule 512 x 108
E44) Calcule 178x8 + 178x2
E45) Calcule 700x15 + 300x15
E46) Calcule 870÷9
E47) Calcule 967÷15
E48) Calcule 1030÷125
E49) Calcule 900÷15 + 300÷15
E50) Calcule 799 x 32 ÷ 16

O resto da divisão

Divisibilidade é um assunto importantíssimo que será estudado no capítulo 5. É um conjunto de técnicas que permitem verificar se um número é divisível por outro, sem necessidade de fazer a divisão. Também permitem descobrir o resto de uma divisão, sem efetuar a divisão (é claro, quando o resto é zero, o número é divisível). Parece uma maravilha, mas isso só pode ser feito por alguns números. Neste capítulo vamos estudar alguns casos.

Resto da divisão por 2

Basta checar o algarismo das unidades. Se for par, então o resto da divisão por 2 é zero. Se for ímpar, o resto da divisão por 2 vale 1.

Resto da divisão por 3

Some os valores de todos os algarismos do número. Repita o processo até ficar com um resultado menor que 10. O resto da divisão deste número por 3, será o mesmo resto da divisão por 3 do número original. Ao somar os algarismos, podemos desprezar o 3, o 6 e o 9, pois estes já são divisíveis por 3, e não afetam o resto.

Ex: Determine o resto da divisão de 1.234.326.776 por 3.
Somamos 1+2+4+2+7+7, o que resulta em 23. Repetindo o processo, podemos desprezar o 3, então o resto da divisão será 2.

Resto da divisão por 5

Basta checar o algarismo das unidades. Se for 0 ou 5, o resto será 0. Se for 1 ou 6, o resto será 1. Se for 2 ou 7, o resto será 2. Se for 3 ou 8, o resto será 3, e se for 4 ou 9, o resto será 4.

Resto da divisão por 9

O processo é similar ao do resto da divisão por 3. Somamos todos os algarismos, podendo desprezar o 9. Repetimos o processo até chegar a um número menor que 10.

Ex: Determine o resto da divisão de 1.234.326.776 por 9.
Somamos 1+2+3+4+3+2+6+7+7+6, o que resulta em 41. Agora somamos 4+1, o resultado é 5. Este é o resto da divisão do número original por 9.

Resto da divisão por 10

O resto da divisão de qualquer número natural por 10 é o seu algarismo das unidades.

Exercícios

E61) Determine o resto da divisão de 1873 por 2, 3, 4 e 5
E62) Determine o resto da divisão de 7523 por 7, 8, 9 e 11
E63) Determine o resto da divisão de 1130 por 3, 4, 9 e 11
E64) Verifique se o número 768 é divisível por 3, 8 e 9
E65) Verifique se 4140 é divisível por 36
E66) Verifique se 1764 é divisível por 24
E67) Determine o resto da divisão de 145x627x331 por 9
E68) Determine o resto da divisão de 1345x3628+2781x1182 por 5. E da mesma expressão, trocando o sinal + por – ?
E69) Determine o resto da divisão por 7 de 2872x3545
E70) Determine o resto da divisão por 10 de 17892x2713-1728x2371

Quadrados e cubos

Já mostramos no capítulo 2, uma tabela com alguns números chamados *quadrados perfeitos*. São obtidos elevando ao quadrado números inteiros, lembrando que elevar um número ao quadrado é a mesma coisa que multiplicar o número por ele mesmo.

Tabela de quadrados perfeitos.

Conta	Resultado
0^2	0
1^2	1
2^2	4
3^2	9
4^2	16
5^2	25
6^2	36
7^2	49
8^2	64
9^2	81
10^2	100

Conta	Resultado
11^2	121
12^2	144
13^2	169
14^2	196
15^2	225
16^2	256
17^2	289
18^2	324
19^2	361
20^2	400

Vejamos agora o que é elevar um número ao cubo, uma operação também fácil. Elevar ao cubo é o mesmo que multiplicar o número por ele mesmo, e novamente por ele mesmo.

$A^3 = A \times A \times A$

É útil conhecer memorizados, os cubos de alguns números inteiros:

Conta	Resultado
0^3	0
1^3	1
2^3	8
3^3	27
4^3	64
5^3	125
6^3	216
7^3	343
8^3	512
9^3	729
10^3	1000

Exercícios

E71) Para dobrar o valor de uma soma, basta dobrar uma das suas parcelas ou todas as suas parcelas?

E73) É correto dizer que quando multiplicamos o dividendo de uma divisão por 10, o quociente também ficará multiplicado por 10?

E74) Se aumentamos 5 unidades do multiplicando em uma multiplicação na qual o multiplicador é 15, o que acontecerá com o produto?

E76) Se um número é 10 vezes outro, a soma deles é quantas vezes maior que o menor deles?

E77) Se um número é 5 vezes outro, a diferença entre eles é quantas vezes maior que segundo número?

E78) É correto dizer que se o quociente de uma divisão é zero, então o dividendo é zero?

E79) Entre as operações indicadas abaixo, quais delas não podem ser realizadas?
0+0, 0-0, 0x0, 0:0, 1+0, 1-0, 1x0, 1:0

E80) Qual propriedade estamos usando quando trocamos 115+38+35 por 115+35+38?

E81) Qual propriedade estamos usando quando trocamos 77+60+40 por 77+100?

E83) Quais propriedade estamos usando quando trocamos 25x17x4 por 25x4x17, depois por 100x17?

E93) Quantos números existem que, ao serem divididos por 4248, resultam em quociente 1238?

E95) Um número tem 10 algarismos e outro tem 7. Quantos algarismos, no máximo e no mínimo, terá o seu produto?

E99) Paulo tem o dobro da idade de José. A soma das suas idades é 30 anos. Quais são as idades de cada um?

E103) O quociente de uma divisão é 5, e a soma do dividendo com o divisor é 120. Qual é o dividendo?

E105) Se um número é o dobro de outro, qual é a relação entre a sua diferença e o menor dos números?

E107) João tem o triplo da idade de Pedro, e é 30 anos mais velho. Quais são as suas idades?

E109) Maria tinha 24 anos quando seu filho nasceu. Hoje Maria tem o triplo da idade do seu filho. Quais são as suas idades?

E113) Se a soma de dois números é 20 e um deles vale x, quanto vale o outro número? Supondo que x seja o menor dos dois números, quanto vale a sua diferença?

E115) Dados dois números, calculamos a sua soma menos a sua diferença. Qual é o resultado?

E117) A soma de dois números é 64, sua diferença é 38. Quais são esses números?

E119) Calcule dois números consecutivos, sabendo que sua soma vale 183

E121) João é 20 anos mais velho que José, e a soma das suas idades é 30. Quais são suas idades?

E125) Dois números têm soma igual a 75. Se subtrairmos do primeiro número 15 unidades e aumentamos do segundo número 12 unidades, os resultados são iguais. Quais são esses números?

E131) O quociente de uma divisão exata é 6, e a diferença entre o dividendo e o divisor é 75. Quais são esses números?

E133) Por quanto devemos multiplicar o número 15 para aumentá-lo em 270 unidades?

Questões resolvidas

Q1) (CM) Sendo N = { $\overline{V}$ – [L . X + CD : V + (V – I) . M] }, a representação decimal do número N, é igual a:

(A) 424 (B) 420 (C) 402 (D) 240 (E) 204

Solução:
O objetivo do problema é calcular a expressão, mas requer que o aluno conheça algarismos romanos:

$\overline{V}$= 5.000
L = 50
X = 10
CD = 400
V = 5
I =1
M =1000

Ficamos então com:

{ 5.000 – [50x10 + 400:5 + (5 –1).1000] } =
{ 5.000 – [500 + 80 + 4.1000] } =
{ 5.000 – [580 + 4000] } =
{ 5.000 – 4580 } =
= 420

Resposta: (B) 420

Q3) (CM) Multiplicando-se o número a pelo número b, obtém-se o número 12119. Então, é possível afirmar que o produto do dobro de a pelo triplo de b é:

(A) (2 x a) + (3 x b) x 12119
(B) (2 + a) x (3 + b) x 12119
(C) 12119 x (2 x a) x (3 x b)
(D) (2 + 3) x 12119
(E) (2 x 3) x 12119

Solução:
A questão é resolvida facilmente com o uso das propriedades associativa e comutativa da multiplicação. Sabemos apenas que a x b vale 12119. Então:

(2 x a)x(3 x b) =
2 x a x 3 x b =
2 x 3 x a x b =
(2 x 3) x (a x b) =
(2 x 3) x 12.119

Resposta: (E)

Q5) (CM) Numa operação de subtração, o minuendo é 346. O subtraendo e o resto são números pares consecutivos. Sabendo que o resto é o maior entre ambos, determine o resto ou diferença.

(A) 122 (B) 142 (C) 172 (D) 174 (E) 176

Solução:
A subtração pode ser armada da seguinte forma:

346	Minuendo
-S	Subtraendo
S+2	Resto ou diferença

Chamamos o subtraendo e o resto de S e S+2 para que sejam números pares consecutivos, como pede o problema. Poderíamos resolver facilmente o problema usando uma equação, mas ao invés disso, usaremos as propriedades dos termos da subtração.

Diminuindo o subtraendo de um valor, o resto aumentará no mesmo valor. Vamos então diminuir S do subtraendo. O novo subtraendo será S-S=0, e o resto aumentará S, passará de S+2 para S+S+2.

346	Minuendo
-0	Subtraendo
S+S+2	Resto ou diferença

Agora vamos subtrair 2 do minuendo. Isto fará com que o resto também diminua 2. O novo minuendo será 346-2 = 344, e o novo resto será S+S+2-2, que é igual a S+S

344	Minuendo
-0	Subtraendo
S+S	Resto ou diferença

Ora, 344-0 é o mesmo que 344. Se este valor é igual a S+S (dobro de S), então S é a metade de 344, ou seja, 344÷2 = 172.

Resposta: (C) 72

Q7) (CM) Qual é o menor número natural que devemos subtrair do número 6280, de modo a obter um número cuja divisão por 73 seja exata?

(A) 2 (B) 10 (C) 73 (D) 86 (E) 6278

Solução:
A divisão fica exata quando eliminamos o resto, ou seja, quando subtraímos o resto do dividendo. Temos então que calcular o resto da divisão de 6280 por 73. Que bom!

```
 6280  | 73
-584   | 86
=044   |
  440  |
 -438  |
 =  2  |
```

Como vemos, quem não sabe usar o algoritmo da divisão não conseguirá resolver este problema.

Resposta: (A) 2

Questões propostas

Q31) (CM) Sérgio e Ricardo são dois irmãos gêmeos sendo que as suas idades são números naturais iguais. Sabendo que o sêxtuplo da soma de suas idades é igual a 336, determine a idade de Ricardo.

(A) 14 (B) 26 (C) 28 (D) 46 (E) 56

Q35) (CM) Rodrigo tem 53 anos, exatamente 39 anos a mais do que a soma da idades de Elisa, Lidiane e Yasmin, suas três sobrinhas. Daqui a quanto tempo a idade de Rodrigo será o dobro da soma das idades daquelas sobrinhas?

(A) 4 anos (B) 5 anos (C) 6 anos (D) 7 anos (D) 8 anos

Q41) (CM) Numa divisão não exata entre números naturais, o dividendo é igual a 514, o divisor é 55 e o quociente é o número natural Q. Determinar o triplo do maior número natural que se pode subtrair do resto, sem alterar o quociente.

(A) 18 (B) 19 (C) 54 (D) 57 (E) 60

Q43) (CM) O algarismo das unidades do número 729 x 153 x 2317 é:

(A) 9 (B) 7 (C) 5 (D) 3 (E) 1

Q45) (CM) O algarismo das unidades do número que é o produto de 515 por 625 é igual a:

(A) 0 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 8

Q53) (CM) Numa subtração, a soma do minuendo com o subtraendo e o resto é 2160. Se o resto é a quarta parte do minuendo, o subtraendo é:

(A) 570 (B) 810 (C) 1080 (D) 1280 (E) 1350

Q61) (CM) Para que o número 5A38B seja divisível ao mesmo tempo por 5, 9 e 10 os valores que A e B devem respectivamente assumir são:

(A) 1 e 0 (B) 0 e 5 (C) 3 e 0 (D) 2 e 0 (E) 1 e 5

Q63) (CM) Qual a sentença matemática verdadeira?

(A) 3 + 4 x 2 = 14
(B) 5 x 5 + (6 – 6) x 10 = 250
(C) 2 x (5 – 3) x 2 = 14
(D) { 7 x 3 + [1 + 8 x (5 – 2) – 2]} = 44
(E) 3 + 4 + 2 x (6 – 4) = 18

Respostas dos exercícios

E1) Adição
E2) Adição é o nome da operação soma é o seu resultado.
E3) Minuendo, subtraendo e resto
E4) A divisão exata deixa resto zero.
E5) Comutativa, fechamento, elemento neutro
E6) Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.
E7) Não, para ser elemento neutro teria que valer também a comutatividade, ou seja, 1÷A teria que ser também igual a A, e não é.
E8) Dividendo, divisor, quociente e resto.
E9) Adição e multiplicação.
E10) Não
E11) 20
E13) 4
E14) 527
E15) 52
E16) 1
E18) 150 e 150
E19) 6 e 18
E21) 130
E22) 19
E23) 14
E24) 24
E26) 64
E27) 0
E29) 383
E31) Fica multiplicado por 10
E32) Fica multiplicado por 25
E33) Fica multiplicado por 6
E34) Fica inalterado
E35) Adição com 0, subtração com subtraendo 0, divisão com divisor 1, multiplicação com multiplicador 1.
E36) 13 e 35
E37) 14
E38) 9 e 8
E39) 3 e 5
E41) 2784
E42) 67528
E43) 55296
E44) 178x8 + 178x2 = 178x(8+2)= 178x10 = 1780
E45) 700x15 + 300x15 = (700+300)x15 = 1000x15 = 15000
E46) 96, resto 6
E47) 64, resto 7
E48) 8, resto 30
E49) 900÷15 + 300÷15 = (900+300)÷15 = 1200÷15 = 80
E50) 799 x 32 ÷ 16 = 799x2 = 1598
E61) 1, 1, 1, 3
E62) 5, 3, 8, 10
E63) 2, 2, 5, 8
E64) Sim, Sim, não
E65) Sim
E66) Não

E67) 6
E68) 2, 3
E69) 6
E70) 8
E71) Todas as suas parcelas.
E73)Não. Será no mínimo multiplicado por 10, no caso da divisão exata, mas poderá ficar maior no caso da divisão não exata, isso dependerá do resto e do quociente da divisão original.
E74) Aumentará 75 unidades.
E76) 11 vezes
E77) 4 vezes
E78) Não. Podemos apenas afirmar que o dividendo é menor que o divisor.
E79) 0:0 e 1:0
E80) Propriedade comutativa da adição
E81) Propriedade associativa da adição
E83) Propriedades comutativa e associativa da multiplicação
E93) 4248
E95) No máximo 17 e no mínimo 16.
E99) Paulo tem 20 anos e José tem 10 anos.
E103) 100
E105) são iguais
E107) João tem 45 anos e Pedro tem 15 anos.
E109) Maria tem 36 e seu filho tem 12 anos.
E113) 20-x; 20-2.x
E115) o dobro do menor número.
E117) 51 e 13
E119) 91 e 92
E121) 25 e 5
E125) 51 e 24
E131) 90 e 15
E133) 19

Respostas das questões propostas

Q31) Resp: (C)
Q35) Resposta: (B)
Q41) Resposta: (D)
Q43) Resposta: (A)
Q45) Resposta: (C)
Q53) Resposta (B)
Q61) Resposta: (A)
Q63) Resposta: (D)
Q86) Resposta: (A)
Q87) Resp: p+1052
Q88) Resp: 32334
Q89) Resp: x= -3, ocorreu há 3 anos;

■

Obtenha a versão mais recente em www.laercio.com.br

Capítulo 5

Múltiplos e divisores

Múltiplo e divisor

Considere os números 18 e 6. Como 18 pode ser dividido por 6 sem deixar resto, dizemos que *18 é múltiplo de 6*. Isso é o mesmo que dizer que *6 é divisor de 18*.

Números primos

Em capítulos anteriores, você já foi apresentado a alguns números primos: 2, 3, 5 e 7. Um número é primo quando só pode ser dividido, com divisão exata, por ele mesmo ou por 1. É o caso dos números citados acima. 2 é o primeiro número primo, além dele, existem infinitos outros:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97...

Números compostos

São todos aqueles números, maiores que 1, que não são primos. Os números compostos podem ser divididos por outros números, além de 1 e eles próprios, ou seja, possuem mais de 2 divisores. Os números compostos também são infinitos:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, ...

Nem primo, nem composto

O número 1 não é primo nem composto. Números primos são 2, 3, 5, 7, 11, etc.

Divisibilidade

Já vimos rapidamente no capítulo 4, alguns critérios de divisibilidade, que servem para descobrir se uma divisão dá resto zero ou não, sem saber o resultado da divisão. A maioria dos critérios de divisibilidade permitem ainda saber o resto da divisão, sem realizá-la. Se o resto for zero, significa que o número testado é divisível pelo outro.

Divisibilidade por 2

Os números divisíveis por 2 são todos aqueles que terminam por algarismos pares: 0, 2, 4, 6, ou 8. Significa que o resto da sua divisão por 2 será 0. Se o número termina por algarismo ímpar, não é divisível por 2, e o resto da sua divisão por 2 será 1.

Divisibilidade por 3

Some os valores de todos os algarismos do número. Repita o processo até ficar com um resultado menor que 10. Se este resultado for 0, 3, 6 ou 9, então o número é divisível por 3. Seu resto da divisão por 3 é o mesmo resto deste último número encontrado. Ao somar os algarismos, podemos desprezar o 3, o 6 e o 9, pois estes já são divisíveis por 3, e não afetam o resto.

Ex: Determine se o número 7432 é divisível por 3, e caso não seja, encontre o resto da sua divisão por 3.

7+4+2 = 13 ➔ 1+3 = 4, resto da divisão por 3 = 1

Portanto o número 7432 não é divisível por 3, e o resto da sua divisão por 3 é 1.

Divisibilidade por 4

Considere apenas os algarismos das unidades e dezenas. Se o algarismo das dezenas for par, transforme-o em 0. Se for ímpar, transforme-o em 1. Agora teste a divisibilidade por 4 do número resultante, que será menor que 20, o que torna o teste bem mais fácil.

Ex: Testar se 328972 é divisível por 4.

Basta fazer o teste com o número 72. Como 7 é ímpar, vamos trocá-lo por 1. Temos então que testar a divisibilidade por 4 do número 12, que obviamente é divisível por 4. Então o número 328972 é divisível por 4. O resto da divisão por 4 deste número simples encontrado é o mesmo do número original.

Divisibilidade por 5

Basta checar o algarismo das unidades. Se for 0 ou 5, o resto será 0. Se for 1 ou 6, o resto será 1. Se for 2 ou 7, o resto será 2. Se for 3 ou 8, o resto será 3, e se for 4 ou 9, o resto será 4. Sendo assim, os números divisíveis por 5 são todos aqueles que terminam em 0 ou 5.

Divisibilidade por 6

Devemos aplicar a divisibilidade por 2 e por 3. Se o número for divisível por 2 e por 3, será também divisível por 6. Entretanto se não for divisível por 6, não saberemos o resto de forma direta, para isso será preciso realizar a divisão.

Ex: Testar se 678 é divisível por 6.
Para ser divisível por 6, é preciso que seja divisível por 2 e por 3.
278 é par, então é divisível por 2.
6+7+8 = 21, que é divisível por 3, então 678 é divisível por 3.
Logo 678 é divisível por 2 e por 3.

Divisibilidade por 8

Para testar a divisibilidade por 8, usamos apenas os algarismos das unidades, dezenas e centenas. Depois, troque o algarismo das unidades pelo resto da sua divisão por 8. Troque o algarismo das dezenas pelo resto da sua divisão por 4. Troque o algarismo das centenas pelo resto da sua divisão por 2. Agora ache o resto da divisão por 8 do número encontrado. Se o resto for 0, então o número é divisível por 8.

Ex: Encontre o resto da divisão de 723763 por 8

723.763 → 763 → 123, que dividido por 8 dá 15, e resto 3.

Então o número pedido não é divisível por 8, e o resto da sua divisão por 8 é 3.

Divisibilidade por 9

O processo é similar ao do resto da divisão por 3. Somamos todos os algarismos, podendo desprezar o 9. Repetimos o processo até chegar a um número menor que 10.

Ex: Determine o resto da divisão de 1.234.326.776 por 9.
Somamos 1+2+3+4+3+2+6+7+7+6, o que resulta em 41. Agora somamos 4+1, o resultado é 5. Este é o resto da divisão do número original por 9.

Divisibilidade por 10

O resto da divisão de qualquer número natural por 10 é o seu algarismo das unidades. Da mesma forma, os números divisíveis por 100 são os que terminam em 00, os divisíveis por 1000 são os que terminam por 000, e assim por diante.

Divisibilidade por 11

A divisibilidade por 11 também é de fácil aplicação. O método permite descobrir o resto da divisão por 11, se for 0, o número será divisível por 11. Some todos os algarismos de ordem ímpar e ache o resto da sua divisão por 11, depois some todos os algarismos de ordem par e ache o resto da sua divisão por 11. Subtraia a soma dos ímpares menos a soma dos pares, para encontrar o resto da divisão por 11. Se o primeiro número for menor que o segundo, adicione 11 antes de subtrair.

Exercícios

E1) Verifique quais dos números abaixo são primos, sem usar as tabelas:
37, 83, 77, 143, 171, 193, 211

E2) Identifique quais dos números abaixo são múltiplos de 3
278, 456, 2388, 1798, 728, 3975

E3) Identifique quais dos números abaixo são múltiplos de 5
788, 345, 2780, 7385, 5551, 1002, 9000

E4) Identifique quais números abaixo são múltiplos de 8
314, 728, 276, 376, 884, 976

E5) Identifique quais dos números abaixo são múltiplos de 6
3782, 323, 2976, 1666, 4902, 7216

E7) Identifique quais dos números abaixo são divisíveis por 9
7289, 738, 1999, 936, 774, 513, 825

Exercícios

E12) O produto de dois números ímpares é sempre ímpar?

E13) Verifique se o número 75 é divisível por 3, 5 e 9

E14) Qual é o menor número maior que 200 e divisível ao mesmo tempo por 2 e por 5?

E16) Um produto tem 8 fatores, sendo que 3 deles são pares e 5 deles são ímpares. Este produto é par ou ímpar?

E17) Quanto temos que somar ao número 189.772 para que se torne um múltiplo de 9?

Múltiplos e divisores

Dado um número natural N, dizemos que os seus múltiplos são aqueles números obtidos quando multiplicamos N por outros números naturais. Por exemplo, os múltiplos de 10 são:

0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, ...

Da mesma forma, os múltiplos de 12 são:

0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, ...

Outro exemplo: 777 é múltiplo de 37, pois 37 x 21 = 777

Qualquer número natural tem uma infinidade de múltiplos. Para encontrá-los, basta multiplicar este número por 0, 1, 2, 3, e assim por diante.

Uma forma de saber se um número é múltiplo de outro é fazendo a sua divisão. Se o resto for 0, então a resposta é SIM.

Ex: Verificar se 341 é múltiplo de 11.
Isso é o mesmo que perguntar se 341 é divisível por 11. Lembre-se do critério de divisibilidade por 11, já ensinado:

341 ➔ Ímpares = 1+3=4, Pares = 4 ➔ Ímpares – pares = 4 – 4 = 0, então 341 é divisível por 11.

Isso é o mesmo que dizer que 341 é múltiplo de 11.

Divisor próprio

O divisor próprio de um número N é um divisor de N que não seja 1 nem N. Por exemplo, os divisores de 6 são 1, 2, 3 e 6. Seus divisores próprios são 2 e 3. Os números primos não possuem divisores próprios.

Descobrindo se um número é primo

Inúmeras vezes em matemática, inclusive em problemas de provas, precisamos descobrir se um determinado número é primo ou não. O processo é relativamente simples, exceto para números muito grandes. Vamos mostrar um método para fazer isso, e depois um aperfeiçoamento que vai torná-lo mais simples.

Método 1)
Ex: Descobrir se 59 é primo
Testamos se o número pode ser dividido por algum dos números primos menores que ele. Esses números são:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 e 53

O número 59 não é divisível por nenhum desses, portanto é primo. O teste é rápido quando testamos números pequenos, como 2, 3, 5 e 11, quando podemos contar com os critérios de divisibilidade já ensinados. Mas fica muito trabalhoso quando passamos para 13, 17, 19...

Felizmente não precisamos testar todos eles. Este é o aperfeiçoamento do método, que será mostrado a seguir.

Método 2)
O Método 1 pode ser bastante facilitado. Não precisamos testar a divisibilidade por todos os primos inferiores ao número testado. Basta testar os primos até a sua raiz quadrada. Para isso, determine qual é o maior número primo cujo quadrado é inferior ao número testado. Para que fique fácil, você precisará memorizar os quadrados dos números naturais. Calcule então os quadrados dos números primos:

$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$5^2 = 25$
$7^2 = 49$
$11^2 = 121$ ➔ já ultrapassou 59, então precisamos testar somente até 7

Vale a pena memorizar os quadrados perfeitos, pois aparecem em muitos problemas de matemática. Graças a esta informação, a nossa lista de números primos a serem testados se são divisores de 59 é

2, 3, 5, 7

Se quiséssemos testar se 863 é primo, bastaria testar sua divisibilidade pelos números primos inferiores a 30 (já que 30^2 é 900, que ultrapassa o número 863). A lista de números primos pelos quais devemos testar se 863 é divisível seria apenas:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

Exercícios

E21) O que é um divisor próprio?

E22) Encontre os números primos entre 70 e 80

E23) Encontre os três primeiros números primos maiores que 100

E26) Encontre todos os múltiplos de 3 compreendidos entre 70 e 80.

E27) Qual é o menor número que devemos acrescentar ao número 72 para que o resultado seja um múltiplo de 5?

E29) Verifique quais dos números abaixo são divisores de 120
2, 9, 12, 15, 16, 24, 36

E30) A soma de dois números é 10, e um é múltiplo do outro. Quais são esses números?

Exercícios

E32) A soma de dois números primos é também um número primo?

E33) Verifique se o número 97 é primo, através de testes.

E34) Verifique se o número 413 é primo

E35) Verifique se o número 147.429 é primo

E39) Encontre todos os números primos entre 120 e 130.

Fatoração

Fatorar um número natural é escrevê-lo na forma de um produto de números primos. A rigor, quaisquer fatores poderiam ser usados, mas as diversas técnicas baseadas em fatoração (Ex: cálculo de MDC, cálculo de MMC) exigem que os fatores sejam números primos.

Exemplo:
50 pode ser fatorado como 5x10
50 pode ser fatorado como 2×5^2 ➔ este modo está na forma de um produto de fatores primos

Algoritmo para fatoração

Para fatorar um número, basta dividi-lo sucessivamente pelos números primos, em ordem. Eventualmente cada fator primo aparecerá mais de uma vez, nesse caso usaremos potências.

Exemplo: Fatorar 120
120 ÷ 2 = 60
60 ÷ 20 = 30
30 ÷ 2 = 15 (agora não pode mais ser dividido por 2, passamos para o 3)
15 ÷ 3 = 5 (agora não pode mais ser dividido por 3, passamos para o 5)
5 ÷ 5 = 1

Então 120 = 2x2x2x3x5 = $2^3.3.5$

Para evitar erros, devemos armar as divisões no dispositivo abaixo. Vejamos o exemplo da fatoração do número 720.

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	= $2^4.3^2.5$

Número de divisores

Outro problema comum em matemática é determinar o número de divisores de um número natural. Também pode ser pedido para que todos esses divisores sejam calculados. Vejamos primeiro como calcular quantos são os divisores, depois como encontrá-los. Usemos como exemplo o número 720. Já fizemos a sua fatoração, e o resultado é:

$720 = 2^4.3^2.5$

Em uma potência, os números são chamados de:

Base: é o número que está elevado
Expoente: é o número ao qual a base está elevada

A forma geral de uma potência é então B^E, onde B é a *base* e E é o *expoente*.

Devemos então escrever o número fatorado e indicar quando existir expoente 1. Por exemplo, o fator 5 pode ser escrito como 5^1. Não esqueça que quando um expoente não está representado, é na verdade igual a 1. Ficamos então com

$720 = 2^4.3^2.5^1$

Agora somamos 1 a cada expoente e multiplicamos os resultados:

(4+1)x(2+1)x(1+1)

O resultado será o número de divisores de número pedido. Ficamos então com:

5x3x2 = 30 divisores

Exercícios

E41) Fatore os seguintes números:

a) 720	c) 96	e) 144	g) 512
b) 150	d) 105	f) 320	h) 630

E45) Quantos divisores tem o número 720?

E46) Quantos divisores tem o número 150?

E47) Quantos divisores tem o número 144?

E51) Um número pequeno pode ter mais divisores que um número grande? Dê um exemplo.

E52) A fatoração $3^2.5^3.9^2$ está correta?

E53) Fatore os números 26, 39 e 95

MMC

O conceito de MMC é muito simples, e vamos explicá-lo com um exemplo. Primeiro vamos determinar todos os múltiplos de 5 e todos os múltiplos de 6, que não seja o zero:

Múltiplos de 5: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, ...
Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96, 102, 108, ...

Note que existem infinitos múltiplos de 5 e infinitos múltiplos de 6. Vamos encontrar agora os números que estão nas duas listas acima, ou seja, que são múltiplos ao mesmo tempo de 5 e de 6. São eles:

30, 60, 90, ...

Esses números são os múltiplos comuns (MC) de 5 e de 6, ou seja, os números que são ao mesmo tempo, múltiplos de 5 e de 6. Note que existem infinitos números que são múltiplos comuns de 5 e de 6.

Agora considere o seguinte: entre todos esses múltiplos comuns de 5 e 6 (que sabemos, são infinitos), qual deles é o menor? Vemos facilmente que é o número 30. O 30 é então o menor múltiplo comum (MC) de 5 e 6, ou seja, é o mínimo múltiplo comum (MMC) entre 5 e 6. Escrevemos na notação matemática:

MMC (5,6) = 30

Com este exemplo é fácil entender o que é o MMC, mas poderíamos pensar que ele é apenas o produto dos dois números (5x6 = 30), mas na verdade não é assim que se calcula. Em alguns casos, o MMC entre dois números é exatamente igual ao produtos desses dois números (veremos mais tarde em que caso o MMC é igual ao produto). Veja um exemplo no qual o MMC não é o produto dos números:

MMC (10, 15):

Múltiplos de 10: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, ...
Múltiplos de 15: 15, 30, 45, 60, 75, 90, ...

Múltiplos comuns de 10 e 15: 30, 60, 90, ...

Logo, MMC (10,15) = 30

O MMC (Mínimo Múltiplo Comum) entre dois números é o menor número que é ao mesmo tempo múltiplo desses dois números.

Exemplo:

$5 = 5^1$
$6 = 2 \times 3 = 2^1 \times 3^1$

MMC (5,6) = $2^1 \times 3^1 \times 5^1 = 30$

MMC de três ou mais números

O método para cálculo do MMC de três ou mais números é o mesmo: Fatores comuns e não comuns, elevados aos maiores expoentes.

Ex: Calcule o MMC entre 24, 45 e 96

$24 = 2^3.3$
$45 = 3^2.5$
$96 = 2^5.3$

MMC (24, 45, 96) = $2^5.3^2.5 = 1440$

MMC por fatoração

Vimos como fatorar um número dividindo-o sucessivamente pelos números primos. No cálculo do MMC, podemos aplicar o método a todos os números envolvidos, simultaneamente. Vamos usá-lo para calcular o MMC entre 24, 45 e 96.

24 – 45 – 96	**2**	Inicialmente dividimos por 2. O 45 é repetido
12 – 45 – 48	**2**	Mais uma vez podemos dividir por 2
6 – 45 – 24	**2**	Pela terceira vez dividimos por 2
3 – 45 – 12	**2**	O 3 e o 45 não podem, mas o 12 ainda pode ser dividido por 2
3 – 45 – 6	**2**	O 6 ainda pode ser dividido por 2.
3 – 45 – 3	**3**	Agora começaremos a dividir por 3
1 – 15 – 1	**3**	O 15 ainda pode ser dividido por 3
1 – 5 – 1	**5**	Agora dividimos todos por 5.
		MMC = $2^5 . 3^2 . 5 = 1440$

Colocamos todos os números, separados por traços. Colocamos uma barra vertical e passamos a dividir simultaneamente, e apenas quando forem divisíveis, os números envolvidos pelos fatores primos, na ordem: 2, 3, 5, 7, 11, etc.

Exercícios

E61) Calcule o MMC entre 18 e 30
E63) Calcule o MMC entre 45 e 72
E65) Calcule o MMC entre 150 e 180
E67) Calcule o MMC entre 24, 36 e 60
E69) Calcule o MMC entre 1, 2, 3, 4, 5 e 6.
E71) Calcule o MMC entre 105 e 120
E73) Calcule o MMC entre 25, 35, 45 e 55
E75) Se A é um número natural, calcule o MMC entre A e 12.A
E77) Determine o menor número que dividido por 30 e dividido por 45 deixa resto 7
E79) Encontre um múltiplo de 36 e 24, compreendido entre 100 e 200.
E80) Dois atletas estão correndo em torno de uma pista de atletismo circular. O primeiro atleta dá uma volta completa na pista em 4 minutos. O segundo atleta dá uma volta em 5 minutos. Sabendo que partiram juntos, depois de quanto tempo os dois vão se encontrar novamente?

MDC

Tão importante quanto o MMC é o MDC. Vamos mostrar o assunto através de um exemplo.

Considere todos os divisores de 72 e todos os divisores de 240.

Divisores de 72: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72
Divisores de 240: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240

Os divisores comuns entre 72 e 240 são:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Entre os divisores comuns de dois números quaisquer, o mínimo sempre será 1, e o máximo é o chamado MDC – Máximo divisor comum. No nosso exemplo, temos que o MDC entre 72 e 240 é 24.

Assim como o MMC, é fácil achar o MDC entre dois números quando já são dados na forma fatorada. Basta multiplicar os fatores comuns entre os dois números, elevados aos menores expoentes.

Exemplo:
$72 = 2^3.3^2$
$240 = 2^4.3.5$

MDC (72, 240) = $2^3 . 3 = 24$

MDC entre três ou mais números

Assim como ocorre no MMC, o MDC também pode ser calculado entre três ou mais números. Usamos a mesma definição: Fatores comuns elevados aos menores expoentes. Vejamos um exemplo:

Ex: MDC (45, 60, 72)
$45 = 3^2.5$
$60 = 2^2.3.5$
$72 = 2^3.3^2$

Fatores comuns: Somente o 3
Menor expoente: 1
Então o MMC é $3^1 = 3$.

MMC por fatoração

O método da fatoração pode ser usado para calcular o MDC, assim como também usamos no MMC. A diferença é que no MMC fazemos as divisões se pelo menos um dos números puder ser dividido, parando quanto todos os números forem reduzidos a 1. No MMC fazemos a divisão se todos os números puderem ser divididos, e terminamos quando os números restantes não possuírem mais fator comum. Vejamos um exemplo:

Ex: Calcular o MDC entre 36, 160 e 84.

36 – 160 – 84	**2**	Todos podem ser divididos por 2
18 – 80 – 42	**2**	Todos podem ser divididos por 2
9 – 40 – 21		FIM – não existem mais fatores comuns
		MDC = $2^2 = 4$

Números primos entre si

Dois números A e B são chamados *primos entre si* quando
MDC (A, B) = 1
Em consequência disso, MMC (A, B) = A.B

Exemplo: Considere os números 45 e 56. Note que nem 45 nem 56 são primos. Fatorando os dois ficamos com:

$45 = 3^2.5$
$56 = 2^3.7$

Note que esses dois números não possuem fatores comuns. Como não existem fatores comuns, o MDC entre eles é 1. O MMC entre eles é o produto deles. Esses dois números não são primos, mas são ditos *primos entre si*.

Exercícios

E81) Calcule o MDC entre 24 e 36

E83) Calcule o MDC entre 48 e 90

E85) Calcule o MDC entre 48, 105 e 120

E87) Calcule o MDC entre 1, 234, 728 e 4.920

E89) Verifique se os números 42 e 75 são primos entre si

E91) Dois números compostos podem ser primos entre si?

E93) Calcule o MDC entre 24, 54 e 84

E95) Calcule o MDC entre $2^3.3^2.5^2$ e $2^2.3^2$. Indique o resultado na forma fatorada.

Exercícios

E101) De uma rodoviária na cidade A partem simultaneamente dois ônibus: um para a cidade B e outro para a cidade C. Outros ônibus partirão para a cidade B de 15 em 15 minutos, e outros partirão para a cidade C, de 20 em 20 minutos. Depois de quanto tempo ocorrerão novamente partidas simultâneas para B e C?

E104) Verificar se os seguintes números são divisíveis por 3:
1289, 2781, 3111, 1268, 17940, 203, 772, 185, 777, 3125

E105) Verificar se os se os seguintes números são divisíveis por 4:
1468, 3278, 7896,4282, 7292, 1186, 704, 1280, 80002, 188

E107) Verifique se os seguintes números são divisíveis por 6:
2764, 2786, 666, 8936, 60016, 8236, 32896, 2382, 3708, 6006

E109) Verifique se os seguintes números são divisíveis por 8:
1368, 32974, 2372, 78320, 3444, 21136, 22728, 3796, 3528, 9324

E111) Verifique se os seguintes números são divisíveis por 11:
2893, 83303, 79202, 7282, 407, 32375, 1238, 792, 392, 95865

E115) Determine o valor do algarismo a para que o número 534a82 seja divisível por 3.

E117) Quanto devemos subtrair de 7289 para que o resultado deixe resto 7 ao ser dividido por 9?

E119) O número 4a7a é divisível por 3 e 5. Determine a.

E121) Encontre um número entre 200 e 300 que seja divisível por 5 e 24.

E123) Quais números menores que 100, ao serem divididos por 7 deixam resto 1, e ao serem divididos por 9, deixam resto 2?

E125) Quais são os dois menores números ímpares que deixam resto 1 ao serem divididos por 5 e por 9?

E127) Qual é o resto da divisão por 5 do produto 7282x2729?

E129) Calcule o resto da divisão por 6 da expressão 371^{34}.

E131) Calcule o resto da divisão por 8 da expressão 726x335

Problemas resolvidos

Q1) (CM) Numa operação de divisão entre números naturais, o quociente é o MMC (25, 125) e o divisor é o menor número natural de três algarismos distintos. Sabendo-se que o resto é o MDC (25, 125), calcule o valor do dividendo.

(A) 2675 (B) 3227 (C) 12750 (D) 12775 (E) 12851

Solução:
Quociente = MMC (25, 125) = 125
Divisor = 102
Resto = 25

Dividendo = Divisor x quociente + resto = 102 x 125 + 25 = 12.775

Resposta: (D) 12775

Q3) (CM) O número natural N é composto pelos algarismos 1A2A34. Sabendo-se que o algarismo A é o mesmo para ambas as posições citadas em N, determine quantas são as possibilidades para o algarismo A, a fim de que o número N seja múltiplo de 6.

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 7 (E) Nenhuma

Solução:
N tem que ser múltiplo de 2 e de 3, para que seja múltiplo de 6. Múltiplo de 2 sempre será, pois termina com 4. Para ser múltiplo de 3, a soma dos algarismos tem que ser múltiplo de 3:
1+A+2+A+3+4 = 10+2.A é múltiplo de 3.
Basta que 2.A + 1 seja múltiplo de 3.
Opções:
2.A+1 = 3 ➔ A=1
2.A+1 = 6 (não pode, A tem que ser algarismo inteiro)
2.A+1 = 9 ➔ A=4
2.A+1 = 15 ➔ A=7
São ao todo 3 possibilidades

Resposta: (B) 3

Q7) (CM) Os alunos Tiago e Igor receberam um desafio matemático de encontrar o maior número pelo qual podemos dividir 52 e 73 para encontrar, respectivamente, restos 7 e 13. Se eles calcularam, corretamente, encontraram o número:

(A) 5 (B) 15 (C) 13 (D) 52 (E) 73

Solução:

Se subtrairmos os respectivos restos, os números resultantes terão que dar divisão exata quando divididos pelo número procurado:
52-7 = 45
73-13 = 60
O número procurado é o MDC entre 45 e 60, que resulta em 15.

Resposta: (B) 15

Q9) (CM) Sabendo-se que 33. 333. 331 x 13 = 433. 333. 303, pode-se afirmar que é múltiplo de 13 o número

(A) 433. 333. 292
(B) 433. 333. 309
(C) 433. 333. 313
(D) 433. 333. 316
(D) 433. 333. 291

Resp: (D)

Q10) (CM) Maria e Ana são irmãs. O produto entre suas idades é 221. Ana é a mais velha. Logo, a soma dos algarismos da idade de Maria é:

(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 6 (E) 2

Solução:
Basta fatorar 221:
221 = 170 + 51 = 17x10 + 17x3 = 17x13
Ana é a mais velha, com 17, e Maria é a mais nova, com 13.

Resposta: (A) 4

Q18) (CM) Dado o número 57a3b, substituir a e b por algarismos que tornem o esse número divisível por 5 e 9 ao mesmo tempo. Dar todas as soluções possíveis.

Solução:
Para ser múltiplo de 5, b tem que ser 0 ou 5. Vejamos as soluções possíveis:
a) Se b=0, então 5+7+a+3 tem que ser múltiplo de 9. O algarismo a tem que valer 3.
b) Se b=5, então 5+7+a+3+5 tem que ser múltiplo de 9. O algarismo a tem que valer 7.

Resposta: a=3 e b=0 ou a=7 e b=5.

Q19) Qual é o menor valor pelo qual temos que multiplicar 60 para que o resultado seja um quadrado perfeito?

Solução:
$60 = 2^2.3.5$
Para que se torne um quadrado perfeito, todos os seus expoentes têm que ser pares. Isto será conseguido se multiplicarmos por 3.5, ficando com $2^2.3^2.5^2$.

Resposta: 15

Q23) (CM) Entre os primeiros mil números naturais pares maiores que 1000, quantos são divisíveis por 2, 3, 4 e 5, simultaneamente?

(A) 30 (B) 31 (C) 32 (D) 33 (E) 34

Solução.
O MMC entre 2, 3, 4 e 5 é 60. Os primeiros 1000 números naturais pares maiores que 1000 vão de 1002 a 3000. Temos que encontrar quantos são os múltiplos de 60 neste intervalo. O primeiro múltiplo de 60 é 1020, o último é 3000. O valor procurado é:

(3000-1020):60 +1 = 198:6 +1 = 34

Outra solução: Calculamos todos os múltiplos de 60 entre 1 e 3000 e subtraímos aqueles entre 1 e 1000.
3000:6 – 960:60 = 50 – 16 = 34

Resposta: (E) 34

Problemas propostos

Q73) (CM) Considere dois números naturais tais que o MDC deles seja 3 e o MMC seja, ao mesmo tempo, igual ao quádruplo do maior e ao quíntuplo do menor. A soma desses dois números é:

(A) 48 (B) 45 (C) 36 (D) 30 (E) 27

Q79) (CM) Dados os números 2700 e 360, a diferença entre o MMC e o MDC deles vale:

(A) 4420 (B) 4840 (C) 5220 (D) 5200 (D) 5100

Q83) (CM) Sabe-se que o número 58m6, de quatro algarismos, é divisível simultaneamente por 3 e por 4. Então, o algarismo m vale:

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

Q84) (CM) A quantidade de números múltiplos de 7 existentes entre 100 e 1971 é:

(A) 264 (B) 265 (C) 266 (D) 267 (E) 268

Q86) (CM) A forma fatorada do número 312 é $2^a.3^b.13^c$.Quanto vale $a^2 + b^3 + c^{13}$?

(A) 11 (B) 10 (C) 8 (D) 6 (E) 5

Q100) (CM) Considere A = 2430. O menor valor natural de n para que n.A seja divisível por 630 é

(A) 7 (B) 21 (C) 35 (D) 4 (E) 28

Q104) (CM) Seja *a* o menor número natural de três algarismos o qual, dividido por 6, 7 ou 12, deixa sempre resto 3. O valor de $a \div 3 + 3$ é igual a:

(A) 14 (B) 31 (C) 51 (D) 60 (E) 84

Q106) (CM) Um número menor que 30.000, quando dividido por 80, 78 e 135, deixa o mesmo resto. Sendo este resto o maior possível, pode-se afirmar que o número em questão vale:

(A) 28157 (B) 28080 (C) 28172 (D) 29781 (D) 29157

Q114) (CM) O menor número que é múltiplo de 15 e também divisor de 30 é:

(A) 3 (B) 15 (C) 30 (D) 450

Q119) (CM) Numa subtração quando somamos 20 unidades ao minuendo e subtraímos 12 unidades do subtraendo, o resto aumentará de:

(A) 8 unidades (B) 12 unidades (C) 20 unidades (D) 32 unidades

Q121) (CM) Um aluno do 6º ano do Colégio Militar, ao efetuar a operação $10^{50} - 2008$, percebeu que, no resultado, o algarismo 9 apareceu:

(A) 39 vezes (B) 40 vezes (C) 47 vezes (D) 48 vezes (E) 49 vezes

Q126) (CM) O número de vezes que o fator primo 3 aparece no produto dos números naturais ímpares compreendidos entre 70 e 90 é:

(A) 3 vezes (B) 4 vezes (C) 5 vezes (D) 6 vezes (E) 7 vezes.

Q129) (CM) O número N tem três algarismos. O produto dos algarismos de N é 126 e a soma dos dois últimos algarismos de N é 11. O algarismo das centenas de N é:

(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 7 (E) 9

Q131) (CM) Para que o número 5A38B seja divisível ao mesmo tempo por 5, 9 e 10 os valores que A e B devem respectivamente assumir são:

(A) 1 e 0 (B) 0 e 5 (C) 3 e 0 (D) 2 e 0 (E) 1 e 5

Q136) (CM) A soma dos fatores primos obtidos na fatoração completa do número 360 é igual a:

(A) 10 (B) 19 (C) 17 (D) 15 (E) 22

Respostas dos exercícios

E1) 37, 83, 193, 211
E2) 456, 2388, 3975
E3) 345, 2780, 7385, 9000
E4) 728, 376, 976
E5) 2976, 4902
E7) 738, 936, 774, 513
E12) Sim
E13) É divisível por 3 e por 5. Não é divisível por 9.
E14) 210
E16) Par
E17) 2
E21) É um divisor de um número que não seja 1 nem o próprio número.

E22) 71, 73, 79
E23) 101, 103, 107
E26) 72, 75, 78.
E27) 3
E29) 2, 12, 15, 24
E30) Existem três respostas possíveis:
1 e 9, 2 e 8, 5 e 5
E32) Não. Por exemplo, 2 é primo e 7 é primo, mas 2+7=9 não é primo.
E33) É primo. Deve ser testada a divisibilidade por 2, 3, 5 e 7.
E34) Deve ser testada a divisibilidade pelos números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19. A divisão por 7 é exata, então 413 não é primo.
E35) É divisível por 3, então não é primo.
E41) $720 = 2^4.3^2.5$; $150 = 2.3.5^2$; $96 = 2^5.3$; $105 = 3.5.7$; $144 = 2^4.3^2$; $320 = 2^6.5$; $512 = 2^9$; $630 = 2.3^2.7.5$
E45) 30
E46) 12
E47) 15
E51) Sim. Se o número grande for primo, terá apenas divisores. Se for comparado com um número pequeno que não seja primo, este número pequeno terá mais de 2 divisores. É claro que nem sempre isso acontece, ou seja, números grandes que não sejam primos podem ter mais divisores que números pequenos.
E52) Não. A expressão está matematicamente correta, mas se é uma forma fatorada, podemos usar apenas números primos, que não é o caso do 9.
E53) 26 = 2.13 39 = 3.13 95 = 5.19
E61) 90
E63) 360
E65) 900
E67) 360
E69) 60
E71) $105 = 3.5.7$; $120 = 2^3.3.5$; $MMC(105, 120) = 2^3.3.5.7 = 840$
E73) 17.325
E75) 12.A
E77) MMC (30, 45) +7 = 97
E79) O primeiro múltiplo comum de 36 e 24 é o MMC entre 36 e 24, ou seja, 72. Mas o problema pede um número compreendido entre 100 e 200. Temos que procurar outros múltiplos de 36 e 24, que não o mínimo, compreendido entre esses valores. Os múltiplos do MMC são 72, 144, 216, etc. O número 144, que é o dobro do MMC, satisfaz ao que o problema pede. Resposta: 144
E80) A maioria dos problemas sobre eventos que se repetem podem ser resolvidos com MMC. No caso de problemas sobre trajetos cíclicos (pistas de atletismo, por exemplo), as informações necessárias são os tempos de trajeto em cada objeto. Os dois atletas fazem o ciclo completo em 4 e em 5 minutos. Se partem do mesmo ponto e no mesmo instante, ficarão juntos novamente depois de um tempo igual ao MMC entre os temos de ciclo de cada um. No caso deste problema, este tempo será o MMC entre 4 e 5, ou seja, 20.
Resposta: 20 minutos
E81) 12
E83) 6
E85) 3
E87) 1
E89) Não
E91) Sim
E93) 6
E95) $2^2.3^2$

E101) MMC (15, 20) = 60 minutos, ou seja, 1 hora.
E104) 2781, 3111, 17940, 777
E105) 1468, 7896, 7292, 704, 1280, 188
E107) 666, 2382, 3708, 6006
E109) 1368, 78320, 21136, 22728, 3528
E111) 2893, 83303, 407, 792, 95865
E115) Resp: 2, 5 ou 8
E117) 1
E119) R: a=6
E121) R: 240
E123) 29 e 92
E125) 1 e 91
E127) R: 3
E129) 1
E141) R: 60
E142) R: 72
E143) 245
E144) Resposta: 2, 12, 22, 42, 52, etc. A diferença entre cada um deles e 32 é 10, 20, 30, 40, etc, ou seja, múltiplos de 10.
E145) Resposta: A diferença entre os dois números tem que ser múltipla de n.

Respostas dos problemas propostos

Q73) Resposta: (C) 27
Q79) Resposta: (C) 5220
Q83) Resposta: (C) 5
Q84) Resposta: (D) 267
Q86) Resposta: (A) 11
Q100) Resposta: (A) 7
Q104) Resposta: (D) 60
Q106) Resposta: (A)
Q114) Resposta: (B) 15
Q119) Resposta: (D)
Q121) Resposta: (D)
Q126) Resposta: (D) 6 vezes
Q129) Resposta (D) 7
Q131) Resposta: (D)
Q166) Resposta: 367
Q167) Resposta: 3
Q168) Resposta: 1 e 7
Q169) Resposta: (A)
Q170) Resposta: (C) 10

■

Obtenha a versão mais recente em www.laercio.com.br

Capítulo 6

Frações

Os termos da fração

O termo de cima é chamado numerador, e o termo de baixo é chamado denominador. Como a fração na verdade é uma divisão, esses dois termos são o dividendo e o divisor da referida divisão.

$$\frac{3}{8}\qquad \begin{array}{l}\text{Numerador}\\ \text{Denominador}\end{array}$$

IMPORTANTE: O denominador nunca pode ser 0, pois não existe divisão por 0.

Lendo frações por extenso

É fácil ler frações. Os numeradores são lidos diretamente por extenso, e o denominador é lido como meio, terço, quarto, etc. Isso vale até o numerador 10. O numerador também é lido em ordinal para múltiplos de 10:

Ex:
1/2 = um meio
1/3 = um terço
3/4 = três quartos
2/5 = dois quintos
1/6 = um sexto
2/7 = dois sétimos.
3/8 = três oitavos
2/9 = dois nonos
7/10 = sete décimos
1/20 = um vigésimo
7/30 = sete trigésimos
1/100 = um centésimo
1/1000 = um milésimo

Para outros números como 11, 12, 13, e que não sejam múltiplos de 10, usamos no final a palavra “avos”.

1/11 = um onze avos
5/12 = cinco doze avos
7/16 = sete dezesseis avos

1/20 = um vigésimo ou um vinte avos

É permitido usar "avos" também quando o denominador é múltiplo de 10, como em "um vinte avos", ao invés de "um vigésimo".

Simplificação de frações

Uma das operações mais comuns com frações é a simplificação. Uma fração não se altera quando dividimos seu numerador e seu denominador pelo mesmo valor. Por exemplo, 30/80 é o mesmo que 3/8, pois dividindo 30 por 10 e 80 por 10, encontramos respectivamente, 3 e 8.

$$\frac{30}{80}=\frac{3}{8}$$

Dizemos então que as frações 30/80 e 3/8 são *equivalentes*.

Exercícios

E1) O que ocorre com uma fração quando o numerador e o denominador são iguais?

E3) O que ocorre com uma fração quando o denominador é 1?

E9) Encontre uma fração equivalente a 5/8 onde o denominador seja 21 unidades maior que o denominador.

Nomenclatura

Muitas vezes, ao invés de simplificar uma fração, dividindo seus termos por um mesmo valor, temos que fazer o inverso: multiplicar os termos da fração por um mesmo valor. Uma fração não se altera quando multiplicamos o numerador e o denominador por um mesmo número.

Exemplo: Encontrar uma fração equivalente a 3/8 que tenha denominador 48.
Para que o denominador e torne 48, temos que multiplicar o denominador atual (8) por 6. O numerador também tem que ser multiplicado por 6. Ficamos então com:

$$\frac{3}{8}=\frac{3\times 6}{8\times 6}=\frac{18}{48}$$

Dizemos então que 3/8 e 18/48 são *frações equivalentes*.

Frações equivalentes

Frações equivalentes são frações que representam o mesmo número, ou seja, têm o mesmo valor. Dada uma fração, podemos obter outra fração equivalente, mediante a multiplicação ou a divisão do numerador e do denominador pelo mesmo número.

Fração irredutível

É uma fração que não pode ser simplificada. Isto ocorre quando o numerador e o denominador são primos entre si.

Exemplos: 2/7, 12/55, 4/9, 1/30, 5/6.

Fração própria e fração imprópria

Quando o numerador é menor que o denominador, dizemos que a fração é *própria*.
Exemplos: 3/5, 2/7, 9/10, 23/38, 4/6.

Quando o numerador é maior ou igual ao denominador, dizemos que a fração é *imprópria*.
Exemplos: 5/3, 7/2, 4/3, 27/25.

Número misto

É um número que tem uma parte inteira e uma parte que é uma fração própria. Considere por exemplo o número misto:

$$3\frac{2}{5}$$

Este é um número racional, resultante da soma do número natural 3 com a fração 2/5, ou seja:

$$3\frac{2}{5} = 3+\frac{2}{5}$$

Todo número misto é equivalente a uma divisão de números naturais, na qual o dividendo é o denominador, o quociente é a parte inteira do número misto e o resto da divisão é o numerador da fração. Por exemplo, se dividirmos 17:5 encontrarmos 3 e resto 2. Então a fração imprópria 17/5 é igual ao número misto 3 2/5. Toda fração imprópria pode ser transformada em número misto, e vice-versa.

Exemplo:

$$5\frac{4}{7} = \frac{5\times7+4}{7} = \frac{39}{7}$$

Da mesma forma,

$$\frac{39}{7} = 5 + \frac{4}{7}$$

Fração aparente

É uma fração que, depois de simplificada, resulta em um número natural, ou seja, seu denominador torna-se 1.

Exemplos:

$$\frac{32}{4}, \frac{24}{6}, \frac{35}{5}, \frac{72}{9}, \frac{91}{13}$$

Fração decimal

É uma fração em que o denominador é 10, 100, 1000 ou potências superiores de 10.
Exemplos:

$$\frac{3}{10}, \frac{27}{100}, \frac{727}{1000}, \frac{25}{100}$$

Fração ordinária

É toda fração que não é decimal, ou seja, cujo numerador não é potência de 10.
Exemplos:

$$\frac{1}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{3}, \frac{11}{2}$$

Exercícios

E13) Como se chama uma fração na qual o numerador e o denominador são primos entre si?

E15) Como se chama uma fração na qual o numerador é múltiplo do denominador?

E25) Gastei 1/3 da minha mesada. Do valor que sobrou, guardei 2/5 e gastei o restante para comprar um jogo de computador que custou R$ 48,00. Qual é o valor da minha mesada?

Operações com frações

Além das operações aritméticas básicas que podem ser usadas com os números inteiros, as frações também podem ser somadas, subtraídas, multiplicadas e divididas. Existem além dessas algumas outras operações que devemos fazer com frações.

Redução ao mesmo denominador

Em várias situações é preciso fazer com que duas frações dadas fiquem com denominadores iguais. Isto é necessário por exemplo para comparar, somar e subtrair frações. Digamos por exemplo que precisamos realizar a adição:

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{4}$$

Somar frações é fácil quando os denominadores são iguais. Por exemplo, 1/5 + 2/5 é igual a 3/5, ou seja, somamos os numeradores e repetimos os denominadores. Mas não podemos fazer isso se os denominadores forem diferentes. Vamos então multiplicar o numerador e o denominador da primeira fração por um número, e multiplicar o numerador e o denominador da segunda fração por outro número, de modo que as duas frações fiquem com denominadores iguais. Esses números são: 4 para a primeira fração e 5 para a segunda fração. Ficamos então com:

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{2\times 4}{5\times 4}+\frac{3\times 5}{4\times 5}=\frac{8}{20}+\frac{15}{20}=\frac{23}{20}$$

E como foram encontrados os "números mágicos" 4 e 5 que usamos para igualar os denominadores? É muito fácil:

1) Calcule o MMC entre os denominadores
2) Em cada fração, o número a ser multiplicado pelo numerador e pelo denominador é igual ao MMC dividido pelo denominador da fração. O MMC dos denominadores é 20, então na primeira fração o número a ser usado é 20:5=4, e na segunda fração é 20:4=5.

A redução ao mesmo denominador também é usada quando queremos comparar frações, ou seja, saber qual delas é a maior.

Vamos ilustrar isso com um exemplo:

Exemplo:
Qual das duas frações é a maior: 23/48 ou 7/15?
O MMC entre 48 e 15 é 240. A primeira fração deverá ter o numerador e o denominador multiplicados por 240:48 =5, e a segunda por 240:15 = 16. Ficamos então com:

$$\frac{23}{48}, \frac{7}{15} \rightarrow \frac{23\times5}{48\times5}, \frac{7\times16}{15\times16} \rightarrow \frac{115}{240}, \frac{112}{240}$$

Portanto, a primeira fração é maior que a segunda, já que conseguimos reduzir as duas ao mesmo denominador e a primeira ficou com o numerador maior.

Exercícios

E27) Coloque as seguintes frações em ordem crescente:
1/3, 4/5, 7/12, 2/3, 11/12, 4/3, 17/12

E29) Encontre três frações equivalentes a 3/8 nas quais os numeradores são os menores possíveis.

E31) Qual é a fração equivalente a 3/16 de menor denominador possível e que seja múltiplo de 12?

Adição e subtração de frações

Para somar ou subtrair frações, é preciso que tenham o mesmo denominador. Se os denominadores não forem iguais, devemos torná-los iguais (reduzir ao mesmo denominador), como já foi ensinado. Agora basta somar ou subtrair os denominadores e repetir o denominador.

Exemplo:

$$\frac{7}{15}+\frac{4}{15}=\frac{7+4}{15}=\frac{11}{15}$$

Exemplo:

$$\frac{8}{11}-\frac{5}{11}=\frac{8-5}{11}=\frac{3}{11}$$

Adição e subtração de uma fração e um número natural

Para fazer esse tipo de operação, transforme o número natural em fração. Para isso, coloque o número como numerador e 1 no denominador.

Exemplo:

$$\frac{2}{5}+3=\frac{2}{5}+\frac{3}{1}=\frac{2}{5}+\frac{15}{5}=\frac{17}{5}$$

Exercícios

E45) Calcule 1/24 – 1/25

E47) Depois de percorrer a metade de um percurso, e mais 1/3 do que estava faltando, quanto resta do percurso total para chegar ao fim?

E49) Efetue as seguintes operações com frações:
a) 3/2 + 4/5 – 1/7
c) 16/3 – 16/4
e) 3/10 + 2/5 + 1/2 – 1/3
g) 3/11 + 8/7
i) 1/2 – 1/4 – 1/8

Multiplicação de frações

Por incrível que pareça, a multiplicação é a operação menos trabalhosa com frações. Basta multiplicar os numeradores e multiplicar os denominadores. Antes de realizar as multiplicações, aproveite para fazer simplificações. Cada numerador pode ser simplificado com o seu próprio denominador ou com a fração vizinha.

Exemplo:

$$\frac{14}{15} \text{x} \frac{25}{4} =$$

O 14 do primeiro numerador e o 4 do segundo denominador podem ser simplificados por 2 ("corta-corta por 2"). Ficamos com:

$$\frac{7}{15} \text{x} \frac{25}{2} =$$

Agora o 25 do segundo numerador e o 15 do primeiro denominador podem ser simplificados por 5. Ficamos com:

$$\frac{7}{3} \text{x} \frac{5}{2} = \frac{35}{6}$$

Fazendo as simplificações cruzadas antes multiplicar, ficaremos com números menores e mais fáceis de operar, caso existem mais cálculos no mesmo problema, por exemplo, em uma expressão envolvendo frações.

Fração de fração

Em matemática, a palavra "de" normalmente tem sentido de multiplicação. Então, 1/3 de 1/2 significa 1/3 x 1/2:

$$\frac{1}{3} \text{x} \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{6} = \frac{1}{6}$$

Multiplicação de uma fração e um número natural

Basta transformar o número em fração, colocando denominador 1.

Exemplo:

$$3 \times \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

Exercícios

E55) Calcule os seguintes produtos de frações:

a) $\frac{2}{5} \times \frac{3}{8}$

c) $\frac{7}{11} \times \frac{1}{2}$

e) $\frac{18}{15} \times \frac{105}{14}$

g) $\frac{3}{4} \times \frac{200}{33}$

i) $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$

Inverso ou recíproco

Toda fração que não tenha numerador 0 tem uma fração inversa correspondente. Também chamada de fração recíproca, é obtida trocando as posições do numerador com o denominador. Por exemplo, a fração inversa de 2/5 é 5/2. Isso também vale para os números naturais, por exemplo, o inverso de 5 é 1/5 (lembre-se que 5 é o mesmo que 5/1).

Divisão de frações

A divisão de frações é quase tão fácil quanto a multiplicação. Para dividir duas frações, basta multiplicar a primeira fração pela inversa da segunda.

Exemplo:

$\frac{3}{5} \div \frac{7}{10} = \frac{3}{5} \times \frac{10}{7} = \frac{3}{1} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$ (já simplificando o 10 e o 5 por 5).

Devemos sempre realizar as simplificações possíveis antes de multiplicar o resultado final.

Porcentagem

Este é um assunto que será detalhado no capítulo 9, mas vamos introduzir rapidamente aqui o conceito de porcentagem. Uma porcentagem nada mais é que uma fração com denominador 100.

Exemplo:

Em uma turma de 50 alunos, 30% deles faltaram em um dia de chuva. Quantos alunos faltaram?

Basta lembrar que "por cento" significa "dividido por 100", e que "de" significa "multiplicado". Então:

$$30\% \text{ de } 50 = \frac{30}{100} \times 50$$

Frações decimais

A porcentagem nada mais é que uma fração decimal com denominador 100. É relativamente fácil trabalhar com frações decimais. No momento vamos ver como converter alguns números decimais para frações decimais. Todo número decimal pode ser dividido em duas partes: parte inteira e parte decimal. Por exemplo:
5,38 ➔ a parte inteira é 5, a parte decimal é 0,38

Para multiplicar um número decimal por 10, basta andar com a vírgula para a direita.
Exemplo: 5,38x10 = 53,8

Para multiplicar um número decimal por 100, basta andar com a vírgula duas casas para a direita.
Exemplo: 5,38x100 = 538,0 = 538

Da mesma forma, para dividir por 10 basta andar com a vírgula para a esquerda.
Exemplo: 45,3÷10 = 4,53

Exercícios

E63) Calcule as porcentagens:
a) 30% de 20
c) 15% de 40
e) 35% de 80
g) 12,5% de 40
i) 80% de 14

E65) Calcule o inverso de:
a) 2
c) 3/5
e) 1/6
g) 2/9
i) 1/7

E66) Efetue as seguintes divisões:
a) $\frac{6}{7} \div \frac{12}{35}$
c) $\frac{1}{3} \div \frac{4}{15}$
e) $15 \div \frac{3}{2}$
g) $\frac{15}{16} \div 8$
i) $2\frac{1}{7} \div \frac{3}{7}$

Exercícios

E79) Resolva as seguintes expressões:
a) $\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$

c) $\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\right)$

e) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\right)$

g) $\left(2\frac{8}{3}+1\frac{1}{2}\right)\times\left(2\frac{1}{5}-1\frac{1}{6}\right)$

i) $\left(2-\frac{3}{4}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)$

E80) Resolva as seguintes expressões:

a) $\left[\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{7}\right)\times\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right)\right]\div\left(\frac{5}{2}-\frac{2}{5}\right)$

c) $\left[\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\div\frac{4}{3}\right)\right]\div\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)$

e) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\times\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)\right]\div\left[\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{7}\right)\times\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\right)-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)\right]$

Exercícios

E83) Qual das afirmativas abaixo é falsa?
(A) A fração cujo denominador é uma potência de 10 é chamada fração decimal.
(B) Fração própria é aquela menor que a unidade
(C) O denominador de uma fração nunca pode ser 0.
(D) A divisão frações é uma operação distributiva em relação à adição
(E) Nas frações impróprias, o numerador é menor ou igual ao denominador

E87) Numa cesta havia laranjas. Deu-se 2/5 a uma pessoa, a terça parte do resto a outra pessoa e ainda restaram 10 laranjas. Quantas laranjas havia na cesta?

E89) Achar as frações próprias e irredutíveis de tal forma que o produto dos seus termos seja 84.

E93) Dividir um número por 0,0625 equivale a multiplicá-lo por quanto?
a) 6,25 b) 1,6 c) 1/16 d) 16 e) 625/100

E95) Gastei 2/5 e depois 1/3 do que possuía, ficando ainda com R$ 12,00. Quanto eu possuía?

E97) Divida a quantia de R$ 84,00 em três partes, de forma que a segunda seja o dobro da primeira e a metade da terceira.

E99) Coloque as frações em ordem crescente:
1/2, 2/3, 4/5, 10/9, 3/5, 7/15.

Questões resolvidas

Q3) (CM) A fração equivalente a 6/4 e cuja soma de seus termos é 25 é igual a:

(A) 12/13
(B) 10/15
(C) 2 1/8
(D) 7/18
(E) 15/10

Solução:

$$\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=\frac{3.a}{2.a}$$

2.a + 3.a = 25
5.a = 25
a=5

A fração é então, (3x5)/(2x5) = 15/10

Resposta: (E) 15/10

Q5) (CM) Qual fração cujo denominador é 24 e é maior que 2/3 e menor que 3/4?

(A) 17/24 (B) 15/24 (C) 13/24 (D) 19/24 (E) 21/24

Solução:
Para permitir a comparação, reduziremos 2/3 e 3/4 e X/24 ao mesmo denominador, que no caso é 24, o MMC entre 3, 4 e 24.

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times 8}{3\times 8}=\frac{16}{24}, \text{ e } \frac{3}{4}=\frac{3\times 6}{4\times 6}=\frac{18}{24}$$

A fração pedida tem o numerador entre 16 e 18, ou seja, 17.

Resposta: (A) 17/24

Q25) (CM) Um professor de educação física propõe a um de seus alunos a realização de uma corrida ao redor de um campo de futebol. Sabe-se que uma volta equivale a 1 km mais meia volta. Dessa forma, se o aluno correu uma volta e meia, determine a distância em quilômetros que ele percorreu.

(A) 1 km (B) 1,5 km (C) 2 km (D) 2,5 km (E) 3 km

Solução:
1 volta = 1 km + 1/2 volta
Porém 1 volta = 1/2 volta + 1/2 volta
Então 1/2 volta + 1/2 volta = 1 km + 1/2 volta
Logo, 1/2 volta = 1 km, e 1 volta = 2 km

Resposta: (C)

Questões propostas

Q49) (CM) Simplificando a expressão $\dfrac{6\times12\times18\times24\times30\times36\times42\times48\times54}{10\times16\times12\times2\times14\times6\times18\times8\times4}$ obtém-se:

(A) 3/2 (B) 27/2 (C) 2^6 (D) 6^3 (E) 3^9

Q51) (CM) Efetuando $\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\right)\div1\dfrac{1}{4}$, o resultado é:

(A) 8/5 (B) 1 (C) 25/16 (D) 8/3 (E) 5

Q53) (CM) Considere as igualdades:

I) $\left[3^4\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right]^5=59049$

II) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^2\div\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=1$

III) $(0{,}001)^2$ x 10^5 = 0,1

IV) $\left(\dfrac{0{,}01}{0{,}2}\right)\div\left(\dfrac{0{,}2}{0{,}01}\right)=1$

São falsas:
(A) II e IV (B) I, II e III (C) III e IV (D) II e III (E) I e IV

Q55) (CM) Soninho gosta muito de dormir. Por dia, ele dorme 10 horas, estuda 6 horas e brinca 2 horas. Qual a fração mais simples que representa o tempo em que Soninho passa acordado diariamente?

(A) 1/4 (B) 18/24 (C) 6/24 (D) 7/12 (E) 14/24

Q57) (CM) A expressão $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2\div\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{3}\times\left(1-\dfrac{1}{4}\right)$ é igual a:

(A) 0,5 (B) 2,5 (C) 2 (D) 1 (E) 3,2

Q59) (CM) O valor da expressão $0{,}6.\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{5}+\dfrac{\frac{3}{9}.3}{2-1{,}98}+5^0$

(A) 50 (B) 52 (C) 54 (D) 56 (E) 58

Q73) (CM) Quantos pedaços iguais a 1/9 de um bolo você precisa comprar para dar 2/3 do bolo ao seu irmão e um bolo inteiro a sua mãe?

(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 9 (E) 27

Q77) (CM) Márcia vai à feira e gasta, em frutas, 1/3 do dinheiro que tem na bolsa. Gasta depois 3/5 do resto em verduras e ainda lhe sobram R$ 20,00. Ela levava, em reais, ao sair de casa,

(A) R$ 75,00 (B) R$ 78,00 (C) R$ 82,00 (D) R$ 70,00 (E) R$ 65,00

Q81) (CM) A fração 204/595 é equivalente à fração irredutível X/Y. Logo, Y - X é igual a:

(A) 51 (B) 47 (C) 45 (D) 29 (E) 23

Q95) (CM) Vânia e Luiz resolveram fazer um festival de suco de laranja. Vânia comprou 2,53 centos de laranja e Luiz comprou 9 5/3 dúzias de laranja. O total de laranjas compradas foi:

(A) 128 (B) 253 (C) 282 (D) 340 (E) 381

Q99) (CM) O custo de funcionamento de uma máquina de fazer concreto é de R$ 52,00 por cada meia hora. Se dispusermos de R$ 312,00, estes serão suficientes para fazê-la operar por:

(A) 6 h (B) 5 h (C) 4 h (D) 3 h (E) 2 h

Respostas dos exercícios

E1) A fração é igual à unidade
E3) A fração é igual ao numerador
E9) 35/56
E13) R: irredutível
E15) R: aparente
E25) R$ 120,00
E27) 1/3, 7/12, 2/3, 4/5, 11/12, 4/3, 17/5
E29) 6/16, 9/24, 12/32
E31) 9/48
E45) 1/600
E47) 1/3 do total
E49) a) 151/70; b) 75/28; c) 4/3; d) 10/7; e) 13/15; f) 1/90; g) 109/77; h) 7/8; i) 1/8; j) 39/10
E55) a) 3/20; b) 16/7; c) 7/22; d) 65/3; e) 9; f) 2/5; g) 50/11; h) 28/25; i) 5/16; j) 16/125;
E63) a) 6; b) 15; c) 6; d) 7; e) 28; f) 25; g) 5; h) 240; i) 56/5; j) 15;
E65) a) 1/2; b) 1/10; c) 5/3; d) 7/4; e) 6; f) 7/24; g) 2/9; h) 1/20; i) 7; j) 11/3;
E66) a) 5/6; b) 39/4; c) 5/4; d) 15/4; e) 10; f) 4/81; g) 15/128; h) 8/5; i) 5; j) 14;
E79)
a) 19/180; b) 32/69; c) 13/420; d) 104/441; e) 29/180;
f) 25/104; g) 1147/180 h) 19/18; i) 5/3; j) 58/3;
E80) a) 11/84; b) 49/6; c) 5/11; d) 2/3; e) 97/24;
E83) Resposta: (D) – é distributiva somente à direita
E87) R: 25
E89) 1/84, 7/12, 4/12, 3/28
E93) (E) 16
E95) R$ 45,00
E97) R$ 12,00; R$ 24,00; R$ 48,00
E99) 4/5, 7/15, 1/2, 3/5, 2/3, 10/9

Respostas das questões propostas

Q49) Resposta: (E) 3^9
Q51) Resposta: (B) 1
Q53) Resposta: (A)
Q55) Resposta: (A) 1/4
Q57) Resposta: (B)
Q59) Resposta: (B) 52
Q72) Resposta: (C) 701
Q73) Resposta: (C) 15
Q77) Resposta: (A) R$ 75,00
Q81) Resposta: (E) 23
Q95) Resposta: (E) 381
Q99) Resposta: (D)
Q106) Resposta: (D)
Q107) Resposta: (A)
Q108) Resposta: (D)
Q109) Resposta: (C)

■

Capítulo 7

Números decimais

Fração decimal

Vimos no capítulo 6 que uma *fração decimal* é uma fração na qual o denominador é 10 ou uma potência superior de 10. Exemplos:

$$\frac{3}{10}, \frac{27}{100}, \frac{4}{10}, \frac{14}{1000}$$

Todas as demais frações, que não possuem denominador que é uma potência de 10, são chamadas *frações ordinárias*.

Nada impede que tenhamos uma fração ordinária que seja equivalente a uma fração decimal. Por exemplo, as frações

$\frac{4}{10}$ e $\frac{2}{5}$ são equivalentes, pois são representações do mesmo número. Entretanto a forma 4/10 é uma fração decimal, enquanto 2/5 é uma fração ordinária.

Número decimal

Toda fração decimal pode ser representada na forma de um *número decimal*. Por exemplo:
3/10 = 0,3
27/100 = 0,27
45/10 = 4,5
722/10 = 72,2

A parte do número que fica à esquerda da vírgula é chamada *parte inteira*. Os algarismos que ficam à direita da vírgula formam a *parte decimal*.

Para converter uma fração decimal em um número decimal equivalente, basta escrever o numerador e acrescentar uma vírgula à direita do algarismo das unidades. Depois andamos para a esquerda com a vírgula, tantos algarismos quanto forem os zeros do numerador. Note que isso vale apenas para frações decimais.

Por exemplo: converter 346/10000 em número decimal
346/10000 ➔ 346, ➔ 34,6 ➔ 3,46 ➔ 0,346 ➔ 0,0346

Como eram quatro zeros na potência de 10 do denominador, andamos com a vírgula quatro casas para a esquerda.

Também é preciso saber como são chamados esses números. Vejamos alguns exemplos:

0,1 = um décimo
0,01 = um centésimo
0,001 = 1 milésimo
0,0001 um décimo de milésimo
0,25 = vinte e cinco centésimos (já que o segundo algarismo depois da vírgula é o algarismo dos centésimos)
0,3 = três décimos (já que o primeiro algarismo depois da vírgula é o algarismo dos décimos).

Exercícios

E1) Escreva as seguintes frações decimais na forma de números decimais:
a) 27/1000
c) 12/10000
e) 156/100
g) 500/10

E2) Escreva as seguintes porcentagens na forma de fração decimal:
a) 20%
c) 1%
e) 0,5%
g) 162%

E3) Escreva as frações decimais correspondentes aos seguintes números decimais:
a) 0,3
c) 0,01
e) 3,24
g) 0,0002

Frações ordinárias e números decimais

Sabemos que uma fração é na verdade uma divisão. Quando estamos operando apenas com números naturais, devemos indicar o quociente e o resto da divisão, que também devem ser números naturais. Por exemplo:

$$\frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$$

Se dividirmos 13 por 2, encontraremos quociente 6 e resto 1. O quociente é a parte inteira do número misto, o resto é o numerador da parte fracionária do número misto. Entretanto, podemos continuar fazendo a divisão, e eventualmente chegar ao resto zero, se trabalharmos com números decimais. Se dividirmos 1 por 2, encontraremos exatamente 0,5. Então representamos o número misto 6 1/2 como 6 + 0,5 = 6,5.

A ideia dessa divisão é colocar uma vírgula depois da parte inteira e continuar fazendo a divisão, até encontrar resto zero. A sequência abaixo mostra os passos dessa divisão:

$$\begin{array}{r|l} 13 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 6 \end{array}$$

Fazemos a divisão até chegar ao resto.

```
13 | 2
 10 | 6,
```

Colocamos uma vírgula depois do quociente e abaixamos um zero para continuar dividindo. No caso, 1 se transforma em 10

```
13 | 2
 10 | 6,5
  0 |
```

10 dividido por 2 dá 5 e resto 0. Se ainda existisse resto, continuaríamos dividindo, até chegar ao resto zero, ou até atingir o número de dígitos desejados (precisão) depois da vírgula.

Então, 13÷2 = 6,5

Portanto não só as frações decimais podem ser convertidas em números decimais. Frações ordinárias também podem, basta realizar as divisões.

Exercícios

E4) Converta as seguintes frações ordinárias em números decimais:
a) 1/4
c) 7/5
e) 7/8
g) 3/25

E5) Converta os seguintes números decimais em frações ordinárias irredutíveis
a) 1,25
c) 0,75
e) 0,125
g) 7,2

Operações com números decimais

Números decimais podem ser somados, subtraídos, multiplicados e divididos. A regra geral é alinhar os números, vírgula sobre vírgula.

Exemplo: Calcule 1,375 + 0,02

```
1,375
0,020
=====
1,395
```

Note que armamos a conta com vírgula sobre vírgula. Em consequência ficamos com décimos sobre décimos, centésimos sobre centésimos, etc. Podemos completar com zeros as casas decimais do número com menos casas decimais. Escrevemos então 0,020 ao invés de 0,02

Exemplo: Calcule 5 – 0,33

```
5,00
0,33
====
4,67
```

Exemplo: Calcule 1,7 x 0,3
Primeiro multiplicamos normalmente os números, mas eliminando a vírgula:

```
17
x3
==
51
```

Agora falta colocar a vírgula. O número de casas decimais do produto será a soma do número de casas decimais dos números que foram multiplicados. Como 1,7 tem uma casa decimal e 0,3 tem uma casa decimal, o resultado terá 1+1=2 casas decimais. Portanto o resultado será 0,51.

Dízimas periódicas

Até agora vimos números decimais com poucas casas decimais. Ao realizarmos a divisão do numerador pelo denominador, encontramos sempre resto zero depois de algumas casas decimais. Esta característica (número de casas decimais limitado) ocorre somente quando o denominador possui apenas potências de 2 e de 5. Quando existem outros fatores primos, a divisão nunca chegará a resto zero (levando em conta que a fração é simplificada antes de iniciarmos a divisão).

Vamos ver o que ocorre quando tentamos dividir 27 por 11. Ficamos com:

```
27          | 11
 50         |------------
  60        | 2,454545...
   50       |
    60      |
     50     |
      60    |
       ...  |
```

O número encontrado, 2,454545... é uma dízima periódica. A *parte inteira* é 2. A *parte periódica*, também chamada de *período*, é 45

Exemplo:

1/7 = 0,142857142857142857142857142857...

O período é 142857

Período e anteperíodo

Os dígitos que não se repetem, caso existam, formam o que chamamos de *anteperíodo*, enquanto a parte que se repete é chamada de *período*. Por exemplo, em 3,4(56), o anteperíodo é 3,4 e o período é 56.

Dízima periódica simples e dizima periódica composta

A dízima periódica simples é toda aquela na qual o período inicia imediatamente depois da vírgula. Exemplos:

0,333...
0,414141...
4,141414...
5,73737373...

Dízimas periódicas compostas possuem algarismos na parte decimal que não fazem parte do período. Exemplos:

3,4777...
2,95323232...
0,3222...

Exercícios

E7) Transforme as seguintes frações em dízimas periódicas
a) 1/3
c) 4/6
e) 4/3
g) 1 2/9
i) 5 3/7

Fração geratriz

Fração geratriz de uma dízima periódica é aquela fração que, ao ser convertida em número decimal, resulta na dízima periódica em questão. Por exemplo, 1/9 é a fração geratriz da dízima 0,111...

É preciso saber fazer o cálculo inverso, ou seja, dada uma dízima periódica, determinar a sua fração geratriz. Existem duas pequenas "fórmulas mágicas" para cálculo da fração geratriz:

Fração geratriz de uma dízima periódica simples

Inicialmente devemos identificar qual é o período e qual é o número de algarismos do período.

Exemplo:
0,5656... : Período: 56 (2 algarismos)

Uma vez definido o período e o seu número de algarismos, a fração geratriz será:

Numerador: O período
Denominador: Tantos algarismos 9 quanto forem os algarismos do período.

No caso de 0,565656..., temos:

$$0{,}565656... = \frac{56}{99}$$

Divisão com aproximação

Como vimos, nem sempre as operações com números decimais resultam em valores exatos. Podemos obter exatidão na adição, subtração e multiplicação, mas o problema está na divisão. Em muitos casos chegamos a dízimas periódicas. Em outros casos a divisão chega ao final, mas com muitas casas decimais. Algumas vezes temos que realizar a divisão com aproximação de um certo número de casas decimais.

Exemplo: Calcule 15/8 com aproximação de 0,01.
Nesse caso realizamos o cálculo e paramos quando chegarmos à segunda casa decimal.

```
15   | 8
 70  | 1,87
  60 |
   4 |
```

Portanto o valor de 15/8 é 1,87 com aproximação de 0,01. O resto encontrado foi 0,04

Muitas vezes, ao realizarmos uma divisão, multiplicamos o dividendo e o divisor por uma potência de dez, para não ter que lidar com a vírgula. O quociente já estará com a vírgula no lugar errado, porém o resto precisará ser ajustado. Será preciso dividir o resto encontrado pela mesma potência de 10 que usamos para multiplicar o dividendo e o divisor.

Exercícios

E8) Encontre a fração geratriz das seguintes dízimas periódicas:
a) 0,323232...
c) 3,1818...
e) 0,999...
g) 0,1333...
i) 2,666...
k) 16,666...
m) 0,444...
o) 0,13232...
q) 0,131313...
s) 0,00666...

E10) Sem efetuar a divisão, indique o número de algarismos depois das vírgula, das seguintes frações que resultam em decimais exatas:
a) 23/40
c) 121/80
e) 15/64

Exercícios

E12) Quais das frações abaixo são frações decimais?
1/5, 2/10, 3/7, 25/100, 30/100

E13) Quais das seguintes frações são equivalentes a números decimais?
1/3, 2/5, 13/25, 23/40, 1/125, 3/50, 15/60

E14) Calcule 0,999...

E15) Quais das seguintes frações geram dízimas periódicas?
2/11, 7/32, 25/64, 3/125, 34/400, 18/600, 13/200

E16) Converter em números decimais:
a) 15/40
b) 17/8
c) 143/25
d) 12/50
e) 3/16
f) 81/200

E17) Escreva as frações decimais correspondentes aos números decimais abaixo:
a) 0,318
b) 2,75
c) 4,13
d) 8,1
e) 7,5
f) 3,25

E19) Calcule
a) 10x9,2 - 8,2x7 + 6x5,2 - 4,3x3
b) (1,2+3x12,6)x(1,5+4,2x5)
c) 1,1 x 1,1 x 1,1

E20) Calcule:
a) $1,2^2$
b) $3,2^2$
c) $1,5^3$
d) $2,5^2$
e) $1,1^3$
f) $4,3^2$

E21) Calcule

$$\left[\left(6{,}5-\frac{1{,}2}{9{,}6}\right)\div\left(0{,}25+\frac{1}{6}\right)-\left(1{,}25-\frac{1{,}2}{4{,}8}\right)\right]\div\left(2{,}5-\frac{1}{2}\right)$$

E22) Diga qual é o anteperíodo e qual é o período das seguintes dízimas periódicas:
a) 4,3888...
b) 1,222...
c) 34,4242...
d) 0,999...
e) 2,133...
f) 3,1666...

E23) Calcule as dízimas periódicas geradas pelas seguintes frações:
a) 2/15
b) 4/7
c) 7/11
d) 5/6
e) 20/3
f) 4/99

Um número famoso: 0,999...

Muitos pensam que este número é aproximadamente igual a 1. Que é quase igual a 1. Na verdade este número é **exatamente igual a 1**. É fácil demonstrar esse resultado. Chamemos o número de X:

X=0,999...
Se calcularmos 10X, será igual a
10X = 9,999... (basta andar com a vírgula uma casa para a direita)
Como 9,999... é igual a 9 + 0,999..., podemos escrever como:

10X = 9 + X
9X = 9
X=1

É um resultado simples, mas é bem melhor conhecê-lo no horário de estudo, e não no meio de uma prova.

Questões resolvidas

Q2) Efetuar (0,1333... : 0,2) : (1/1,2)

Solução:
0,1333... = (13-1)/90 = 12/90 = 2/15
0,2 = 1/5
1/1,2 = 10/12 = 5/6

Ficamos então com:
$$\left(\frac{2}{15} \div \frac{1}{5}\right) \div \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{4}{5}$$

Resposta: 4/5

Q4) (CM) Um milésimo multiplicado por um centésimo cujo resultado é dividido por quatro décimos de milionésimo é igual a:

(A) 0,025 (B) 0,25 (C) 2,5 (D) 25 (E) 250

Solução:
0,001 x 0,01 = 0,00001/0,0000004 = 100/4 = 25

Resposta: (D)

Q5) (CM) Um exercício que o professor Genivásio passou como tarefa consiste em escolher um número decimal e elevá-lo ao quadrado. O resultado, eleva-se ao quadrado. E assim por diante até que o número tenha oito casas decimais ou mais. Lina escolheu 0,9. A soma dos algarismos do número que encontrou é:

(A) 18 (B) 21 (C) 14 (D) 26 (E) 27

Solução:
0,9
$0{,}9^2 = 0{,}81$
$0{,}81^2 = 0{,}6561$
$0{,}6561^2 = 0{,}43046721$
Soma dos algarismos = 27

Resposta: (E)

Q7) (CM) Para cercar totalmente um terreno devem ser construídos 532,4 metros de muro. Um pedreiro já construiu 70% do comprimento do muro. Quantos metros ainda faltam para se construir o muro todo?

(A) 139,72 m (B) 692,12 m (C) 372,68 m (D) 159,72 m (E) 129,72 m

Solução:
Faltam 30% de 532,4 metros = 0,3 x 532,4 = 159,72 m

Resposta: (D)

Q8) (CM) Mariana comprou uma calça e uma blusa, gastando ao todo R$ 102,00. Sabe-se que a blusa custou R$ 52,00 a mais que a calça. Qual a quantia paga pela blusa?

(A) R$ 52,00 (B) R$ 50,00 (C) R$ 77,00 (D) R$ 25,00 (E) R$ 102,00

Solução:
Vamos chamar o preço da calça de C. O preço da blusa é 52+C. Os dois juntos custam R$ 102,00, então

C+C+52 = 102
C=25
O preço de blusa é 25+52 = R$ 77,00

Resposta: (C)

Q11) (CM) Para a produção de um determinado tênis, uma fábrica gasta R$ 29,00 em cada par produzido. Além disso, a fábrica tem uma despesa fixa de R$ 3.920,00, mesmo que não produza nada. O preço de venda do par de tênis é R$ 45,00. O número mínimo de pares de tênis que precisam ser vendidos, para que a fábrica comece a ter lucro, é um número:

(A) múltiplo de 5.
(B) primo.
(C) múltiplo de 43.
(D) divisível por 6.
(E) cuja soma de seus algarismos é 10.

Solução:
Cada par de tênis dá um lucro de R$ 45,00 – R$ 29,00 = R$ 16,00
O número de pares de tênis necessários para cobrir a despesa fixa é igual ao valor da despesa fixa dividido pelo lucro de um par de tênis:

R$ 3.920,00 ÷ R$ 16,00 = 245
A única opção que atende é a letra (A)

Resposta: (A)

Q12) (CM) Pedrinho tinha R$ 10,00. Com muito esforço e dedicação, conseguiu aumentar em 7/2 seu dinheiro. Um dia, a pedido de sua mãe, deu 4/9 de suas economias para sua irmã. Do dinheiro que lhe restou, investiu 3/4 em uma caderneta de poupança e, depois de um mês, esse dinheiro investido aumentou em 12%. A quantia atual que Pedrinho possui é igual a

(A) R$ 40,00 (B) R$ 27,25 (C) R$ 25,25 (D) R$ 35,15 (E) R$ 42,00

Solução:
Valor inicial: R$ 10,00
Aumentou 7/2 = multiplicar por (1 + 7/2) = R$ 45,00

Deu 4/9 para a irmã, restaram 5/9 de R$ 45, 00 = R$ 25,00
Investiu 3/4 em uma caderneta: (3/4) x R$ 25,00 = R$ 18,75, guardou o restante (R$ 6,25)
Rendeu 12%: Multiplicar por 1,12: R$ 18,75 x 1,12 = R$ 21,00
Devemos somar a este valor, os R$ 6,25 que não foram para a caderneta, totalizando
R$ 27,25

Resposta (C)

Q20) (CM) Um garoto, ao abrir seu cofre, verificou que nele haviam somente moedas de R$ 0,05 e de R$ 0,10 num total de 45 moedas que somavam R$ 3,20. A diferença entre o número de moedas de R$ 0,05 e R$ 0,10 existentes no cofre é igual a:

(A) 13 (B) 11 (C) 3 (D) 5 (E) 7

Solução:
Se todas as 45 moedas fossem de R$ 0,05, teria exatamente 45 x R$ 0,05 = R$ 2,25. Como temo R$ 3,20, ou seja, R$ 0,95 a mais, significa que existem moedas que não são de 5, e sim, de 10 centavos. O número de moedas é R$ 0,95 / R$ 0,05 = 19 moedas. Portanto 19 moedas são de 10 centavos, as restantes (45-19=26) são de 5 centavos. A diferença pedida é 26-19=7

Resposta: (E) 7

Q21) (CM) Dividir um número por 0,0125 é o mesmo que multiplicar esse mesmo número por:

(A) 125/10000 (B) 80 (C) 800 (D) 8 (E) 1/8

Solução:

$$0{,}0125 = \frac{125}{10000} = \frac{25}{2000} = \frac{5}{400} = \frac{1}{80}$$

Então dividir por 0,0125 é dividir por 1/80, que é o mesmo que multiplicar por 80.

Resposta: (B) 80

Questões propostas

Q31) (CM) Durante a resolução de um determinado problema, envolvendo frações e números decimais, apareceu a seguinte operação:
4 : 0,005
Esta operação equivale a:

(A) 4 x 2000 (B) 4 x 200 (C) 4 x 5000 (D) 4 x 500 (E) 4 x 20

Q34) (CM) A expressão (8,815 – 3,23 x 0,5) : (18 : 50) é igual a:

(A) 20 (B) 25 (C) 14 (D) 23 (E) 17

Q35) (CM) A soma dos valores absolutos dos algarismos do número que representa o resultado da expressão 5,34 x 3,55 + 60,43 : 10 é:

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

Q37) (CM) Lucas, ao comprar um videogame cujo preço à vista era R$ 1345,00, deu R$ 300,00 de entrada e pagou o restante em 12 prestações de R$ 105,00. Se tivesse comprado o videogame à vista teria economizado

(A) R$ 205,00. (B) R$ 215,00. (C) R$ 190,00. (D) R$ 225,00. (E) R$ 240,00.

Q38) (CM) No início do mês, Paulinho recebeu o seu salário e tratou de pagar as dívidas contraídas no mês anterior. Verificou que, se pagasse metade dessas dívidas, lhe sobrariam R$ 1.500,00, mas se pagasse integralmente essas dívidas, lhe sobrariam R$ 900,00. Então, o salário recebido por Paulinho foi de:

(A) R$ 2.100,00 (B) R$ 2.400,00 (C) R$ 2.500,00 (D) R$ 2.700,00 (E) R$ 3.000,00

Q43) (CM) André convidou alguns amigos para comemorarem na cantina do colégio o seu aniversário. Na confraternização, foram consumidos 4 pastéis a R$ 2,25 cada, 5 copos de suco a R$ 0,75 cada e 3 sorvetes a R$ 2,80 cada. André fez questão de pagar a conta. O valor total da conta que André pagou foi de:

(A) R$ 18,90 (B) R$ 26,20 (C) R$ 22,00 (D) R$ 23,75 (E) R$ 21,15

Q45) (CM) Mamãe foi à feira e comprou 5/2 kg de maçãs e 7/4 kg de pêras. O quilo da maçã estava custando R$ 5,00 e o quilo da pêra, R$ 8,00. O valor que mamãe pagou foi:

(A) R$ 39,00 (B) R$ 26,50 (C) R$ 13,00 (D) R$ 81,00 (E) R$ 8,10

Q46) (CM) A aluna Ivone recebe, por semana, R$ 50,00 para seus gastos, incluindo o lanche da escola. No fim da semana, ela verificou os seus gastos com o lanche e notou que havia comprado 3 salgados, a R$ 2,00 cada; 2 fatias de bolo, a R$ 1,50 cada; 4 sucos, a R$ 1,80 cada e um refrigerante, a R$ 2,50. A quantia que lhe restou nessa semana para os demais gastos foi de:

(A) R$ 31,30 (B) R$ 18,70 (C) R$ 7,80 (D) R$ 42,20 (E) R$ 21,70

Q47) (CM) Ana multiplicou 3,5 por 0,8 e adicionou 4,25 ao resultado. Dividiu o valor encontrado por 5 e depois subtraiu o resultado por 1. O número que ela obteve no final foi:

(A) 1,41 (B) 41 (C) 0,41 (D) 55,85 (E) 5,585

Q49) (CM) Clara vai ao mercado comprar latas de creme para fazer os doces do seu aniversário. Chegando lá encontra uma lata de creme pelo preço de R$ 2,20 e uma caixa com seis dessas latas por R$ 12,00. Clara necessita comprar 28 dessas latas de creme. Quanto, no mínimo, ela gastará?

(A) R$ 55,60 (B) R$ 56,80 (C) R$ 61,60 (D) R$ 60,00 (E) R$ 58,00

Respostas dos exercícios

E1) 0,0027 45,6 0,0012 0,005 1,56 0,001 50,0 2,7
E2) 20/100 5/100 1/100 13/1000 5/1000 125/10000 162/100 200/100
E3) 3/10 12/10 1/100 175/100 324/100 1001/10 2/10000 1/1000000
E4) 0,25 1,25 1,4 2,2 0,875 3,75 0,12 0,15
E5) 5/4 7/20 3/4 5/8 1/8 17/5 36/5 17/4
E7) a) 0,333... b) 0,222... c) 0,666... d) 0,(428571) e) 1,333... f) 0,727272...

g) 1,222... h) 3,333... i) 5,(428571) j) 1,2666...
E8) a) 32/99 b) 1 7/9 c) 3 2/11 d) 5/9 e) 1 f) 2 2/15 g) 2/15 h) 2 41/99
i) 2 2/3 j) 8 1/3 k) 16 2/3 l) 5 1/9 m) 4/9 n) 1/15 o) 131/990 p) 7/120
q) 13/99 r) 55/74 s) 1/150 t) 5 47/99

E10) a) 3 b) 6 c) 4 d) simplificando, 2/125: 3 casas e) 6 f) 4
E12) Resp: 2/10, 25/100, 30/100
E13) Resp: 2/5, 13/25, 23/40, 1/125, 3/50, 15/60
E14) 1
E15) Resp: 2/11
E16) 0,375 2,125 5,72 0,24 0,1875 0,405
E17) 318/1000 275/100 413/100 81/10 75/10 325/100
E19) a) 146,2 b) 877,5 c) 1,331
E20) 1,44 10,24 3,375 6,25 1,331 18,49
E21) 143/20
E22) a) 3 e 8 b) período 2 c) período 42 d) período 9 e) 1 e 3 f) 1 e 6
E23) 0,1333... 0,(571428) 0,636363... 0,8333... 6,666... 0,04040404...

Respostas das questões propostas

Q31) (B)
Q34) (A) 20
Q35) (C) 7
Q37) (B)
Q38) (A)
Q43) (E)
Q45) (B)
Q46) (A)
Q47) (C)
Q49) (B)
Q52) (D)
Q53) (E)

■

Obtenha a versão mais recente em www.laercio.com.br

Capítulo 8

Potências ///

Abreviando multiplicações

No início do ensino fundamental você aprendeu que uma multiplicação nada mais é que uma soma de várias parcelas iguais. Por exemplo:

5+5+5+5 pode ser escrito como 4x5. No caso da multiplicação, tanto faz escrever 4x5 ou 5x4, já que a multiplicação é uma operação comutativa.

Assim como a multiplicação é uma forma abreviada para uma soma de várias parcelas iguais, a potência é uma forma abreviada para uma multiplicação de vários fatores iguais.

Exemplo: $10 \times 10 \times 10 = 10^3$

Exemplo: $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$

Exemplo: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$

Portanto uma potenciação nada mais é que uma forma abreviada de escrever uma multiplicação com muitos fatores iguais. A potenciação também é uma operação aritmética entre números naturais. Os termos da potenciação são chamados de *base* e *expoente*.

2^7 ➔ Expoente
➔ Base

A base é o número que está sendo multiplicado. O expoente indica quantos fatores iguais a este número serão usados. Neste exemplo, o valor equivale a:

2x2x2x2x2x2x2

Lê-se: “2 elevado à sétima potência”. Vejamos outros exemplos:

5^2 : Cinco elevado ao quadrado, ou simplesmente, “cinco ao quadrado”
7^3 : Sete elevado ao cubo, ou simplesmente, “sete ao cubo”
2^5 : Dois elevado à quarta potência, ou simplesmente, “dois à quinta”

Exercícios

E1) Represente os seguintes produtos na forma de potências, usando as mesmas bases do enunciado:
a) 4x4x4x4x4x4x4
c) 7x7x7x7x7x7x7x7
e) 5.5.5.5.5.5
g) 16.16.16
i) 8.8.8

E2) Represente as seguintes potências na forma de um produto:
a) 3^5
c) 5^6
e) 4^{10}
g) 10^4
i) 5^4

E3) Represente como um produto de potências:
a) 3.3.3.3.3.3.2.2.2.2
c) 2.2.2.2.2.3.3.7.7.7
e) 10.10.20.20.20
g) 2.2.3.3.3.4.4
i) 2.3.5.3.2.5.2.3.5.2

0 e 1

0 e 1 são dois números considerados casos especiais, tanto quando operam como quando operam como expoentes. Vejamos o que acontece em cada caso:

$1^n=1$

O número 1, multiplicado por ele mesmo, sempre dará resultado 1, não importa quantas vezes seja multiplicado. Por exemplo:

1^2 = 1x1 = 1
1^5 = 1x1x1x1x1 = 1
1^{10} = 1x1x1x1x1x1x1x1x1x1=1
$1^{87902049820934}$ = 1

$0^n=0$

Quando multiplicamos o número 0 por ele mesmo, não importa quantas vezes seja, o resultado sempre será 0.

0^2 = 0x0 = 0
0^5 = 0x0x0x0x0 = 0
0^{10} = 0x0x0x0x0x0x0x0x0x0 = 0
$0^{90509239908202939302}$ = 0

$n^1=n$

Já que o expoente indica o número de vezes que o fator (base) aparece no produto, quando temos expoente 1 significa que este fator aparecerá apenas uma vez. Então o resultado é o próprio fator.

$5^1 = 5$
$6^1 = 6$
$73^1 = 73$
$8989349839^1 = 8989349839$
$a^1 = a$

$n^0=1$

A potenciação é uma multiplicação. Se o expoente for zero, então significa que não colocamos fator algum. A ausência de fator faz com que o resultado da operação seja 1. Lembre-se que 1 é o elemento neutro da multiplicação, ou seja, equivale a não fazer multiplicação alguma.

$1^0 = 1$
$5^0 = 1$
$10^0 = 1$
$302930239^0 = 1$

0^0 = não pode

Entre as potenciações de números naturais, esta é a única que não é permitida. O número zero pode ser elevado a qualquer potência que seja um número natural positivo, mas não pode ser elevado a zero. Dizemos que a operação de potenciação não é definida quando a base e o expoente são ao mesmo tempo, 0. Podemos ter base 0 elevada a qualquer expoente que não seja 0, e também podemos elevar qualquer base a 0, desde que esta base não seja 0, mas 0 elevado a 0 é proibido.

$0^n = 0$, para n diferente de 0
$n^0 = 1$, para n diferente de 0
0^0 não é definido

Exercícios

E4) Calcule:
a) 1^{30}
c) 1^{10000}
e) 0^{47}
g) 3^1
i) 1000^1
k) 8^0
m) 1000^0

Fatoração

Quando fatoramos um número natural, estamos fazendo a sua representação como um produto de fatores primos, usando potências. Os fatores primos (2, 3, 5, 7, 11, ...) são as bases, e os expoentes são os números de vezes que cada fator primo aparece na decomposição.

Exemplo: Representar o número 840 na forma de um produto de fatores primos.
$840 = 2x2x2x3x5x7$
$840 = 2^3 \text{ x } 3 \text{ x } 5 \text{ x } 7$
Neste exemplo, os fatores 3, 5 e 7 aparecem apenas uma vez, então ficam com expoente 1.

Exemplo: Representar o número 9600 na forma de um produto de fatores primos.
$9600 = 2^7.3.5^2$

Exercícios

E5) Representar os seguintes números como um produto de fatores primos com os respectivos expoentes:
a) 125
b) 768
c) 810
d) 512
e) 750

Multiplicação de potências

Lembrando que uma potência é uma multiplicação com fatores iguais, podemos encontrar expressões simplificadas para o produto de potências. Podemos encontrar fórmulas especiais para dois casos: multiplicação de potências de mesma base e para potências de mesmo expoente.

Multiplicando potências de mesma base

Digamos que você encontrou no meio de uma expressão, 2^5 x 2^3. Esta multiplicação pode ser expressa como uma única potência de 2. Vejamos:

$2^5 = 2.2.2.2.2$
$2^3 = 2.2.2$
$2^5 \times 2^3 = (2.2.2.2.2).(2.2.2) = 2.2.2.2.2.2.2.2$

O fator 2 apareceu no produto 8 vezes, que é exatamente a soma das 5 vezes que apareceu no primeiro fator com as 3 vezes que apareceu no segundo fator. Já que a base é a mesma, somamos as contagens de cada fator. Chegamos então à formula para multiplicar potências de mesma base:

$\boxed{a^x.a^y = a^{x+y}}$

Ou seja para multiplicar potências de mesma base, repetimos a base e somamos os expoentes.

Multiplicando potências de mesmo expoente

Algumas vezes podemos encontrar expressões envolvendo o produto de potências com bases diferentes, mas expoentes iguais. Por exemplo: 2^5 x 3^5. Muitas vezes é conveniente deixar essas potências como estão, pois cada uma individualmente poderá eventualmente ser simplificada com outra potência de mesma base, na mesma expressão. Em alguns casos entretanto pode ser preciso juntar, por exemplo, para dar a resposta final, ou quando as alternativas de resposta já estão com essas potências multiplicadas. Façamos isso com a expressão desse exemplo:

Exemplo:
Calcular 2^5 x 3^5
$2^5 \times 3^5 = (2.2.2.2.2).(3.3.3.3.3) = 2.2.2.2.2.3.3.3.3.3 = 2.3.2.3.2.3.2.3.2.3 = (2.3)^5$

Este resultado pode ser resumido na fórmula:

$\boxed{a^x.b^x = (a.b)^x}$

Ou seja, para multiplicar potências com bases diferentes e expoentes iguais, basta repetir o expoente e multiplicar as bases.

Exemplos:
$2^4.5^4 = 10^4$
$3^6.5^6=15^6$
$2^2.7^2=14^2$

Exercícios

E9) Multiplique as seguintes potências
a) $2^5.2^7.2^3$
c) $2^6.2^7.2^8$
e) $5^3.5^5.5^2.5^4$
g) $3^5.3^2$
i) $5^7.5^8$

E10) Multiplique as seguintes potências, dando a resposta na forma de uma potência única
a) $3^5.5^5$
c) $2^2.3^2.5^2$
e) $5^5.5^5$
g) $a^5.b^5$
i) $2^{5000}.5^{5000}$

Divisão de potências

Podemos dividir potências facilmente, em duas situações

a) Bases iguais, expoentes diferentes. Por exemplo, $2^7 \div 2^3$
b) Bases diferentes, expoentes iguais. Por exemplo, $10^3 \div 2^3$

Dividindo potências de mesma base

Vejamos por exemplo como calcular $2^7 \div 2^3$
Podemos formar uma fração com a primeira potência no numerador e a segunda potência no denominador. Além disso, vamos desmembrar as potências na forma de multiplicações. Ficamos com:

$$\frac{2^7}{2^3} = \frac{2.2.2.2.2.2.2}{2.2.2}$$

Podemos simplificar a fração, cortando 3 fatores "2" no numerador e no denominador. Ficamos com:

$$\frac{2^7}{2^3} = \frac{2.2.2.2.2.2.2}{2.2.2} = \frac{2.2.2.2}{1} = 2^4$$

O expoente 4 que resultou nada mais é que a diferença entre o expoente do numerador subtraído do expoente do denominador. Daí vem a fórmula geral para dividir potência de mesma base:

$$\boxed{a^x \div a^y = a^{x-y}}$$

Portanto, para dividir potências de mesma base, basta repetir a base e subtrair os expoentes.

Dividindo potências de mesmo expoente

Vejamos agora como fazer um cálculo como $10^6 \div 2^6$, ou seja, mesmo expoente mas bases diferentes. Vamos representar a divisão na forma de fração e expandir as multiplicações. Ficamos com:

$$\frac{10^6}{2^6} = \frac{10.10.10.10.10.10}{2.2.2.2.2.2} = \frac{10}{2} \times \frac{10}{2} \times \frac{10}{2} \times \frac{10}{2} \times \frac{10}{2} \times \frac{10}{2} = \left(\frac{10}{2}\right)^6 = 5^6$$

No exemplo, 10/2 resulta em um número inteiro, ficamos então com 5^6, mas quando não é possível simplificar, deixamos indicado na forma de fração.

Vemos então que para dividir potências com expoentes iguais, basta dividir as bases e manter o expoente. A fórmula geral é:

$\boxed{a^x \div b^x = (a/b)^x}$

Exercícios

E11) Efetue as seguintes divisões
a) $3^5 \div 3^2$
c) $5^7 \div 5^5$
e) $7^5 \div 7^4$
g) $6^9 \div 6^3$
i) $100^8 \div 100^3$

E12) Efetue as seguintes divisões
a) $10^6 \div 5^6$
c) $16^5 \div 4^5$
e) $15^4 \div 5^4$
g) $30^4 \div 6^4$
i) $120^{10} \div 24^{10}$

Potência de um produto e de uma fração

Outra expressão que podemos encontrar em potências é a potência de um produto e a potência de uma fração. Já vimos nesse capítulo como realizar essas operações quando falamos no produto e na divisão de potências de mesmo expoente.

$\boxed{(a.b)^x = a^x.b^x}$

$\boxed{(a/b)^x = a^x \div b^x}$

Para elevar um produto a uma potência, basta elevar cada fator a esta potência e multiplicar os resultados. Para elevar uma fração a uma potência, basta elevar o numerador e o denominador a esta potência e manter a fração (ou a divisão)

Exemplos:
$(2.7)^3 = 2^3.7^3$
$(2.3.5)^4 = 2^4.3^4.5^4$
$(2/3)^5 = 2^5/3^5$

Exercícios

E15) Calcule as seguintes potências:
a) $(3.5)^2$
c) $(5.7)^5$
e) $(2/3)^7$
g) $(2/5)^3$
i) $\left(\frac{2.3}{5}\right)^2$

Potência de uma potência

Uma potência também pode ser elevada a uma potência. Basta lembrar que potência é uma multiplicação. Se multiplicarmos o resultado desta multiplicação por ele mesmo, estaremos elevando-o a uma potência. Por exemplo:

$3.3.3.3 = 3^4$
Se multiplicarmos agora, $3^4.3^4.3^4.3^4.3^4$, isto é o mesmo que elevar 3^4 à quinta potência, ou seja, $(3^4)^5$. Em 3^4, o fator 3 aparece 4 vezes. Este grupo de 4 fatores 3 é multiplicado por si mesmo, formando uma cadeia de 5 fatores. Portanto o fator 3 aparecerá 4x5 vezes, ou seja, 20 vezes, ou seja,

$(3^4)^5= 3^{20}$

De um modo geral, vale a fórmula:

$$\boxed{\left(a^x\right)^y = a^{x.y}}$$

Portanto, para elevar uma potência a uma potência, repetimos a base e multiplicamos os expoentes.

Exemplos:
$(3^4)^2= 3^8$
$(5^2)^3= 5^6$
$(2^7)^2= 2^{14}$

Exercícios

E16) Calcule as seguintes potências:
a) $(2^3.3^5)^2$
c) $(2^5.7^3)^4$
e) $(11^3.13^2)^{15}$
g) $(3^3.5^2)^5$
i) $(7^5.10^3)^3$

Potências de 10

Potências de 10 aparecem com frequência na matemática e em várias áreas das ciências. Numericamente não há nada de especial nas potências de 10. São tratadas como outra potência qualquer. As potências de 10 resultam em números como milhares, milhões, bilhões, etc.

$10^0 = 1$ = um
$10^1 = 10$ = dez
$10^2 = 100$ = cem
$10^3 = 1.000$ = mil
$10^4 = 10.000$ = dez mil
$10^5 = 100.000$ = cem mil
$10^6 = 1.000.000$ = um milhão
$10^7 = 10.000.000$ = dez milhões
$10^8 = 100.000.000$ = cem milhões
$10^9 = 1.000.000.000$ = um bilhão
$10^{10} = 10.000.000.000$ = dez bilhões
...

Os cálculos com este tipo de potência são similares aos de outras potências.

Exemplo:
$10^2.10^3 = 10^5$
$(10^3)^4 = 10^{12}$
$10^6 \div 10^2 = 10^4$

Exercícios

E18) Efetue as seguintes operações com potências, dando o resultado na forma de uma única potência, quando for possível.
a) $0,5^2$
c) $(100x1000)^2$
e) $10^7.10^3$
g) $(0,2 \text{ x } 0,5)^2$
i) $(0,4 \div 0,3)^2$

Potências e divisibilidade

Os problemas que envolvem divisibilidade são muito comuns. Podemos encontrar problemas de divisibilidade envolvendo o resto da divisão e potências.

Existem várias propriedades matemáticas envolvendo o resto da divisão. Na verdade essa é uma parte importante da *teoria dos números*. Uma propriedade importante é que se dois números A e B deixam o mesmo resto ao serem divididos por Q, então A^n e B^n também deixarão restos iguais ao serem divididos por Q.

Exemplo:
Calcule o resto da divisão por 9 de 13^2
O número 13 deixa resto 4 ao ser dividido por 9. Se o elevarmos ao quadrado, o resto será o mesmo de 4^2. Como deixa 4^2 resto 7 ao ser dividido por 9, então 13^2 também deixará resto 7.

Exemplo:
Calcule o resto da divisão por 9 de 13^{20}.
Vimos que os restos da divisão das potências de 13 por 9, são os mesmos restos da divisão das potências de 4 por 9. Em suma, basta trabalhar com os restos no lugar dos números dados. Elevar um número à vigésima potência é trabalhoso, mesmo para números pequenos. Este tipo de problema fica fácil devido ao fato dos restos serem repetidos ciclicamente:

Resto da divisão de 4^1 por 9: 4
Resto da divisão de 4^2 por 9: 7

Resto da divisão de 4^3 por 9: 1
Resto da divisão de 4^4 por 9: 4
Resto da divisão de 4^5 por 9: 7
Resto da divisão de 4^6 por 9: 1
...

Sempre ocorrerá um ciclo repetitivo, mas o tamanho do ciclo depende dos números em questão. Nesse caso, vemos que os restos 4, 7 e 1 são repetidos. Então, todo expoente que seja um múltiplo de 3 deixará resto 1, quando o expoente deixar resto 1 na divisão por 3, o resto será 4, e quando deixar resto 2 na divisão por 3, o resto da divisão por 9 será 7.
No nosso caso, o expoente é 20. O resto da divisão por 3 é 2. Então o resto será o mesmo deixado por 4^2, ou seja, 7.

Exemplo:
(CM) O algarismo das unidades (unidades simples) do número 9^{998} vale:

(A) 9 (B) 8 (C) 6 (D) 3 (E) 1

Solução:
Devemos calcular o resto da divisão por 10 do número 9^{998}. Devemos identificar o ciclo de repetição de restos:

Resto da divisão por 10 de $9^1 = 9$
Resto da divisão por 10 de $9^2 = 1$
Resto da divisão por 10 de $9^3 = 9$
Resto da divisão por 10 de $9^4 = 1$
...

Vemos então que este é um caso muito fácil, os restos se repetem de 2 em 2. Para todos os expoentes ímpares, o resto será 9, para todos os expoentes pares, o resto será 1. Então o resto da divisão de 9^{998} será 1.

Resposta: (E) 1

Exercícios

E19) Expressar os números 7^{200}, $1024^{40}.3^{100}$ e $16^{25}.625^{50}$ como potências de expoente 100.

E20) Calcule $4^{\left(4^2\right)}$ e $\left(4^4\right)^2$, exprimir ambos na forma de uma potência de 2.

E21) Calcule $\dfrac{2^{60}+2^{58}}{2^{40}+2^{38}}$

E22) (CM) Em uma colônia de bactérias havia 1000 bactérias. A cada hora, o número de bactérias dobrava. Quantas bactérias havia depois de 8 horas?

E24) Calcule a expressão
$$\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2\right]-\frac{1}{8}\right\}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$$

E25) Calcule $\dfrac{5^{10} - 25^4}{3 \times 2^3}$

E26) Calcule $15^{20} \div 5^{20}$

E27) Calcule 2^6.(25% de 25% de 25%)

Questões resolvidas

Q2 (CM) Uma professora da 5ª série do CMRJ colocou numa prova as três expressões numéricas abaixo indicadas:

A: $(1{,}44 \div 0{,}3 - 0{,}2 \div 0{,}5) \times 1{,}06$
B: $10^2 \div 5^2 + 5^0 \times 2^3 - 1^6$
C: $\dfrac{\frac{1}{3} + 1{,}5 - 0{,}1}{0{,}25 + \frac{2}{3} - 0{,}05}$

Os resultados apresentados por Mariana foram: A=4,664; B=11 e C=2
Assim, podemos dizer que Mariana:

(A) acertou somente uma expressão
(B) acertou somente as expressões A e B
(C) acertou somente as expressões B e C
(D) acertou todas as expressões
(E) errou todas as expressões

Solução:
A = $(1{,}44 \div 0{,}3 - 0{,}2 \div 0{,}5) \times 1{,}06$ = (4,8 – 0,4) x 1,06 = 4,664
B = $10^2 \div 5^2 + 5^0 \times 2^3 - 1^6$ = 4 + 8 -1 = 11
C = (1+4,5 – 0,3) / (0,75 + 2 – 0,5)
(multiplicamos o numerador e o denominador por 2 para eliminar as frações)
= 5,2 / 2,6 = 2
Acertou todas!

Resposta: (D)

Q3) (CM) O resultado da expressão $(21^{13} \div 7^{13}) \div (9^4 + 9^4 + 9^4)$ é:

(A) 12 (B) 36 (C) 81 (D) 108 (E) 243

Solução:
$3^{13} \div 3.3^8 = 3^4 = 81$

Resposta: (C)

Q5) (CM) A metade do número $3^{14} - 27^4$ é igual a:

(A) $2^2 \times 3^{12}$
(B) $3^{12} \times 27^2$

(C) $3^7 - 27^2$
(D) $2^4 \times 3^{14}$
(E) $3^{12} \times 27^2$

Solução:
$3^{14} - 27^4 = 3^{14} - 3^{12} = 3^{12}.(3^2 - 1) = 8 \times 3^{12}$
A metade deste número é 4×3^{12}

Resposta: (A)

Q8) (CM) A fração $2^{30} / 8$ é igual a:

(A) 2^{10} (B) 8^9 (C) 4^9 (D) 2^{26} (E) 8^{18}

Solução:
$2^{30} / 2^3 = 2^{27} = 8^9$

Resposta: (B)

Q9) (CM) O preço de uma passagem era de R$ 1,00 em janeiro de 2005 e começou a triplicar a cada 6 meses. Em quanto tempo esse preço passou a ser de R$ 81,00?

(A) 3 anos (B) 2 anos (C) 4 anos (D) 1 ano e meio (E) 4 anos e meio

Solução:
De R$ 1,00 para chegar a R$ 81,00, tem que ser multiplicado por 81 = 3x3x3x3. São necessários 4 períodos de 6 meses, ou seja, 2 anos.

Resposta: (B)

Questões propostas

Q19) (CM) Enquanto isso, Barba Negra seguia para a ilha da Cabeça da Caveira, onde enterrava todo o tesouro que roubava dos navios do Rei. Assim que chegou à ilha, foi logo pegando seu mapa, pois sem ele jamais encontraria o local onde anteriormente enterrara seu tesouro roubado. A primeira pista do mapa era: "Da pedra das Gêmeas, caminhe K passos no sentido leste, onde K é o resultado da expressão abaixo." Quantos passos Barba Negra caminhou?

(A) 29
(B) 30
(C) 46
(D) 52
(E) 58

$$\boxed{\dfrac{\left(\dfrac{95}{90}+0,555\ldots\right)\div\dfrac{5}{6}}{\dfrac{30^2}{120}\times\dfrac{4}{2^2\times3^2\times5^2}}}$$

Q21) (CM) Determine o valor da expressão

$$1-\frac{1}{1}+\left(\frac{1}{1}\right)\times1^{11}$$

(A) 2 (B) 0 (C) 3 (D) 1 (E) 1/2

Q22) (CM) Em uma colônia de bactérias, uma bactéria divide-se em duas a cada hora. Depois de 8 horas, o número de bactérias originadas de uma só bactéria é

(A) o dobro do número oito
(B) oito vezes o quadrado do número dois
(C) o quadrado do número oito
(D) duas vezes o quadrado do número oito
(E) a oitava potência do número dois

Q23) (CM) Por ser uma cidade rica, próspera e com a melhor infra-estrutura possível para a época, quando um novo morador chegava à cidade era informado de que deveria pagar impostos por 10 anos consecutivos. O imposto era pago da seguinte forma: no 1º ano, 1 (uma) moeda de ouro; no 2º ano, 2 (duas) moedas de ouro; no 3º ano, 4 (quatro) moedas de ouro; no 4º ano, 8 (oito) moedas de ouro; e assim, sucessivamente, até o 10º ano. Então, podemos afirmar que no 10º ano ele pagou:

(A) 256 moedas (B) 340 moedas (C) 400 moedas (D) 512 moedas (E) 1024 moedas

Q24) (CM) Com relação à potenciação de números naturais, é correto afirmar que:

(A) Todo número natural diferente de zero, quando elevado ao expoente zero, é igual a 1.
(B) Todo número natural elevado ao expoente 1 é igual a 1.
(C) Em 2^{100}, 100 é a base e 2 é o expoente.
(D) Está correto que $2^3 = 6$
(E) É falso que $3^2=9$

Respostas dos exercícios

E1) a) 4^7 b) 6^3 c) 7^8 d) 10^4 e) 5^6
f) 11^2 g) 16^3 h) 7^4 i) 8^3 j) 4^4
E2) a) 3x3x3x3x3 b) 12x12 c) 5x5x5x5x5x5 d) 16x16x16x16x16x16x16
e) 4x4x4x4x4x4x4x4x4x4 f) 2x2x2x2x2x2x2 g) 10x10x10x10 h) 9x9x9
i) 5x5x5x5 j) 2x2x2x2x2x2x2x2x2x2
E3) a) $3^6.2^4$ b) $2^3.5^3.7^2$ c) $2^5.3^2.7^3$ d) $2^5.3^2.5^3$ e) $10^2.20^3$ f) $3^4.7^2$
g) $2^2.3^3.4^2$ h) $3^2.4^3.5^4$ i) $2^4.3^3.5^3$ j) $2^2.3^3.5^2.7^3$
E4) a) 1 b) 1 c) 1 d) 0 e) 0 f) 0 g) 3
h) 27 i) 1000 j) 9890809324598923923 k) 1 l) 1 m) 1 n) 1
E5) a) 5^3; b) $2^8.3$; c) $2.3^4.5$; d) 2^9; e) $2.3.5^3$
E9) a) 2^{15} b) 3^6 c) 2^{21} d) 10^6 e) 5^{14} f) 2^{70} g) 3^7 h) 10^{13} i) 5^{15} j) 2^{17}
E10) a) 15^5 b) 10^7 c) 30^2 d) 24^5 e) 5^{10} ou 25^5 f) 80^3 g) $(ab)^5$ h) 20^6 i) 10^{5000} j) 25^7 ou 5^{14}
E11) a) 3^3 b) 2^3 c) 5^2 d) 10^5 e) 7 f) 12^3 g) 6^6 h) a^{30} i) 100^5 j) 1000
E12) a) 2^6 b) 6^3 c) 4^5 d) 8^2 e) 3^4 f) 3^5 g) 5^4 h) 2^2 i) 5^{10} j) 16^6
E15) a) $15^2 = 225$ b) $20^3 = 8.000$ c) 35^5 d) 12^4 e) $2^7/3^7$
f) $1/7^{10}$ g) $2^3/5^3 = 8/125$ h) $2^2/9^2$ i) $6^2/5^2 = 36/25$ j) $2^3/70^3 = 8/343000$
E16) a) $2^6.3^{10}$ b) $3^9.5^{12}$ c) $2^{20}.7^{12}$ d) $3^{50}.10^{20}$ e) $11^{45}.13^{30}$
f) $2^{32}.5^{24}.7^{40}$ g) $3^{15}.5^{10}$ h) $3^8.11^{10}$ i) $7^{15}.10^9$ j) $2^6.59^2$
E18) a) 0,25 ou 1/4 ou $1/2^2$ b) 10^4 c) 10^{10} d) 10^4 e) 10^{10} f) $3^3.10^6$ g) $1/(10^2)$ h) $1/(10^{10})$
i) $4^3/3^2$ j) $1/10^3$
E19) 49^{100}, 48^{100}, 50^{100}
E20) 2^{32} e 2^8

E21) 2^{20}
E22) $1000 \times 2^8 = 256.000$
E24) 201/80
E26) 3^{20}
E27) 1

Respostas das questões propostas

Q19) Resposta: (E)
Q21) Resposta: (D)
Q22) Resposta: (E)
Q23) Resposta: (D) $2^9 = 512$
Q24) Resposta: (A)
Q25) Resposta: (D)
Q26) Resposta: (A)
Q27) Resposta: (E)
Q28) Resposta: 9/40

■

Obtenha a versão mais recente em www.laercio.com.br

Capítulo 9

Porcentagem

Porcentagem é uma fração

Podemos explicar porcentagem em poucas palavras, dizendo apenas o seguinte: porcentagem é uma fração com denominador 100. Quando falamos "X% de alguma coisa", estamos na verdade calculando:

$$\text{X\% de (alguma coisa)} = \text{(alguma coisa)}.\frac{X}{100}$$

Exemplo:
De um grupo de 20 pessoas, 60% são crianças. Qual é o número de crianças?

$$20.\frac{60}{100} = 20.\frac{3}{5} = 12$$

São portanto 12 crianças, ou seja, 60% de 20 é igual a 12.

Então, calcular uma porcentagem de um número é o mesmo que multiplicar o número por uma fração, cujo numerador é a porcentagem e o denominador é 100. Normalmente esta fração pode ser simplificada.

Outros exemplos:
15% dos alunos faltaram (número de alunos)
38% dos votos (o total de votos)
25% do salário (o valor total do salário)
Tive lucro de 10% sobre o preço de compra (o preço de compra, precedido por SOBRE)
Tive um desconto de 15% sobre o total da compra (o preço total da compra).

Nos problemas de porcentagem, o DE ou SOBRE corresponde matematicamente à multiplicação.

Muitas vezes precisamos identificar a fração que corresponde a uma porcentagem. Para isso, basta escrever a porcentagem na forma de fração e simplificá-la. Toda porcentagem pode também ser escrita na forma de um número decimal. Por exemplo:

2% = 0,02 = 2/100 = 1/50
5% = 0,05 = 5/100 = 1/20

10% = 0,1 = 10/100 = 1/10
20% = 0,2 = 20/100 = 1/5
30% = 0,3 = 30/100 = 3/10
25% = 0,25 = 20/100 = 1/4
40% = 0,4 = 40/100 = 2/5
50% = 0,5 = 50/100 = 1/2
75% = 0,75 = 75/100 = 3/4
90% = 0,9 = 90/100 = 9/10
120% = 1,20 = 120/100 = 6/5
200% = 2,00 = 200/100 = 2

As porcentagens são muitas vezes usadas para distribuições ou divisões, como no exemplo abaixo:

Exercícios

E1) Calcule:

a) 20% de R$ 100,00
b) 30% de 10 quilos
c) 25% de 20 quilômetros
d) 40% de 10 horas
e) 50% de 30 pessoas
f) 35% de 40 minutos
g) 2% de R$ 240,00
h) 10% de R$ 1200,00
i) 3% de 100.000 pessoas
j) 15% de 60 laranjas

E2) Transforme as seguintes frações ou números decimais em porcentagens

a) 0,5
b) 0,7
c) 3/5
d) 1/8
e) 2/5
f) 3/4
g) 5/4
h) 1
i) 0,02
j) 3/10

E4) Calcule as seguintes porcentagens de porcentagens, dando o resultado em porcentagem:

a) 70% de 80%
b) 90% de 90%
c) 50% de 40%
d) 20% de 20%
e) 10% de 5%

Aumentos em porcentagem

Muitas vezes não estamos interessados nos valores, e sim, no aumento na forma de porcentagem. Por exemplo, se uma cidade tinha 1000 habitantes e depois de algum tempo passou a ter 1.100 habitantes, dizemos que sua população teve um aumento de 10%. Chamamos isto de *aumento percentual*. É calculado da seguinte forma:

$$\text{Aumento percentual} = \frac{\text{(Valor novo) - (Valor antigo)}}{\text{(Valor antigo)}} \times 100\%$$

No caso da cidade que teve sua população aumentada de 1000 para 1100 habitantes, o aumento percentual é:

$$\frac{1100-1000}{1000}\times 100\% = 10\%$$

Exemplo:
Jorge tinha guardados R$ 80,00. Depois de 1 mês tinha R$ 90,00. Qual foi o aumento percentual do seu dinheiro?

$$\frac{90-80}{80}\times 100\% = 12{,}5\%$$

Exemplo:
Um jogo de computador custava R$ 200,00. No mês seguinte, devido ao aumento do valor do dólar, o jogo estava sendo vendido a R$ 230,00. Qual foi o aumento percentual?

$$\frac{230-200}{200}\times 100\% = 15\%$$

Exercícios

E6) Calcule de quanto foi o aumento percentual
a) A população de uma cidade aumentou de 20.000 para 23.000 habitantes
b) O saldo bancário aumentou de R$ 5.000,00 para R$ 5.400,00
c) O número de agências bancárias aumentou de 250 para 270
d) O número de alunos aumentou de 300 para 336
e) A velocidade aumentou de 80 Km/h para 100 Km/h

E7) Quanto fica o valor final depois de aumentar
a) 5% sobre R$ 800,00
b) 20% sobre 50 Km/h
c) 3% sobre 10.000 pessoas
d) 3,5% sobre R$ 400,00
e) 0,2% sobre R$ 1.000.000.000.000,00?

Lucro, multa e juros

Esses são três elementos da matemática financeira que são baseados em porcentagem. Vamos apresentá-los de forma bem simplificada.

Lucro

Lucro é o ganho financeiro obtido por quem faz uma venda de um produto por um preço mais alto, depois de ter comprado o produto por um valor mais baixo.

$$\text{Lucro percentual} = \frac{\text{(Valor de venda) - (Valor de compra)}}{\text{(Valor de compra)}} \times 100\%$$

Exemplo:
Seu Joaquim da padaria comprou no mercado, latas de refrigerante a R$ 1,00 cada. Vendeu os refrigerantes na padaria por R$ 1,50. Qual foi o seu lucro percentual?

O lucro percentual é calculado da mesma forma que o aumento percentual:

$$\frac{1{,}50-1{,}00}{1{,}00}\times 100\% = 50\%$$

Multa

A multa é um valor adicionado a um pagamento em dinheiro que funciona como uma penalidade, em geral devido a um atraso. Em geral a multa é especificada em porcentagem, e depende do valor principal (o valor a ser pago, sem multa) e de outros fatores, como por exemplo, o número de dias de atraso.

Jorge pagou seu aluguel de R$ 500,00 com 5 dias de atraso. É cobrada uma multa de 0,2% por dia de atraso. Qual foi o valor pago?

Este tipo de multa é calculado por uma fórmula simples:

Valor x taxa x tempo

O valor total a ser pago é o valor normal somado com a multa.

No nosso caso, teríamos:

R$ 500,00 x 0,2/100 x 5 = R$ 5,00

A multa no caso é de R$ 5,00, e o valor total a ser pago é R$ 505,00.

Juros

Matematicamente, os juros funcionam como a multa, são calculados da mesma forma. Financeiramente, os objetivos são diferentes. A multa é uma penalidade, normalmente devido a um pagamento atrasado. Os juros são um valor adicional cobrado, normalmente por bancos, quando é feito um empréstimo.

Exemplo:
José pegou R$ 1.000,00 emprestados no banco, e terá que devolver em um mês, com juros de 5,5%. Qual é o valor que deverá devolver terminado o prazo de 30 dias?

R$ 1.000,00 x 5,5/100 = R$ 55,00
Valor a ser devolvido: capital + juros = R$ 1.000,00 + R$ 55,00 = R$ 1.055,00

Resposta: R$ 1.055,00

Exercícios

E8) Qual deve ser o valor de venda para obter lucro de:
a) 10% sobre valor de compra de R$ 5.000,00?
b) 25% sobre valor de compra de R$ 1,00?
c) 30% sobre valor de compra de R$ 10,00?
d) 40% sobre valor de compra de R$ 2,00?
e) 50% sobre valor de compra de R$ 5,00?

E9) Qual é o lucro percentual obtido quando na venda de um produto:
a) Compramos por R$ 100,00 e vendemos por R$ 115,00?
b) Compramos por R$ 300,00 e vendemos por R$ 333,00?
c) Compramos por R$ 500,00 e vendemos por R$ 540,00?
d) Compramos por R$ 2,00 e vendemos por R$ 2,80?
e) Compramos por R$ 15,00 e vendemos por R$ 18,30?

E10) Calcule a multa em dinheiro
a) Multa de 10% sobre um valor de R$ 200,00
b) Multa de 2% sobre uma conta de R$ 500,00
c) Multa de 25% sobre uma conta de R$ 300,00
d) Multa de 15% sobre uma conta de R$ 400,00
e) Multa de 12% sobre uma conta de R$ 600,00

E13) José aplicou R$ 1000,00 no banco, com taxa de 1% ao mês. Quanto tinha depois de um mês?

Reduções em porcentagem

Assim como muitos valores podem aumentar, tendo seus aumentos medidos em porcentagem, também é comum o caso em que os valores diminuem. Por exemplo, quando uma loja baixa o preço de uma mercadoria.

Exemplo:
Uma loja reduziu o preço de um produto de R$ 100,00 para R$ 90,00. A redução neste exemplo foi de 10%.

Calculando a redução

A *redução percentual* é sempre calculada em relação ao valor inicial, e fórmula é bem parecida com a do aumento percentual:

$$\text{Redução percentual} = \frac{\text{(Valor antigo) - (Valor novo)}}{\text{(Valor antigo)}} \times 100\%$$

No nosso caso temos:

$$\frac{100-90}{100} \times 100\% = 10\%$$

Exemplo:
Carlos compra e vende carros usados. Comprou um carro por R$ 9.000,00 e o vendeu por R$ 7.200,00. De quanto foi seu prejuízo percentual?

Obviamente teve prejuízo, pois vendeu o carro por um valor mais baixo que o preço de custo. A fórmula do prejuízo percentual é parecida com a do lucro percentual:

$$\text{Prejuízo percentual} = \frac{\text{(Valor de compra) - (Valor de venda)}}{\text{(Valor de compra)}} \times 100\%$$

No nosso caso temos:

$$\frac{9000-7200}{9000} \times 100\% = 20\%$$

Uma só fórmula

Todas as fórmulas que apresentamos aqui são bastante parecidas. São fórmulas para aumento, redução, lucro e prejuízo. Todas podem ser resumidas em uma só:

$$\text{Variação percentual} = \frac{\text{(Valor de maior) - (Valor menor)}}{\text{(Valor inicial)}} \times 100\%$$

No numerador, calculamos sempre a diferença entre o maior e o menor valor (pode ser final-inicial ou inicial-final, dependendo de ser aumento ou redução). No denominador usamos sempre o valor inicial, antes de sofrer a alteração.

Exercícios

E14) José comprou um carro por R$ 5.000,00 mas ao vendê-lo teve um prejuízo de 10%. Qual foi o valor de venda?

E15) Carlos comprou por engano, dois livros iguais por R$ 30,00 cada um. Só conseguiu vender um deles com prejuízo de 20%. Por quanto vendeu o livro?

E16) Determine se houve lucro ou prejuízo, e qual foi seu valor percentual:
a) Compra por R$ 30,00 e venda por R$ 33,00
b) Compra por R$ 25,00 e venda por R$ 24,00
c) Compra por R$ 15,00 e venda por R$ 18,00
d) Compra por R$ 100,00 e venda por R$ 95,00
e) Compra por R$ 200,00 e venda por R$ 230,00

Usando a multiplicação

Algumas dicas podem ajudar você a aplicar porcentagens de forma bem rápida. Por exemplo:

Somar 10% é a mesma coisa que multiplicar por 1,1
Somar 20% é a mesma coisa que multiplicar por 1,2
Somar 50% é a mesma coisa que multiplicar por 1,5
Diminuir 10% é a mesma coisa que multiplicar por 0,9
Diminuir 20% é a mesma coisa que multiplicar por 0,8
Diminuir 50% é a mesma coisa que multiplicar por 0,5

É fácil perceber isso através de exemplos:

Exemplo:
Uma mercadoria custava R$ 100,00 e teve um aumento de 10%. No final, por quanto seu preço inicial foi multiplicado?

10% de 100 = R$ 10,00
Preço original + aumento = R$ 100,00 + R$ 10,00 = R$ 110,00
É o resultado que seria obtido se multiplicássemos o preço original por 1,1

Exemplo:
Somar 5% é o mesmo que multiplicar por ....?

Muitos respondem erradamente 1,5, já que são 5%. Está errado, pois a porcentagem deve ocupar dois dígitos depois da vírgula, sendo iguais ao algarismo das dezenas e o algarismo das unidades. No caso de 5% temos:
Dezenas: 0
Unidades: 5
Então o valor correto é 1,05 e não 1,5. Multiplicar por 1,5 é o mesmo que somar 50%:

Dezenas: 5
Unidades: 0

Somar 50% seria multiplicar por 1,50. Como 1,50 é o mesmo que 1,5 não precisamos escrever o zero.
Da mesma forma, temos:

Somar 1% é multiplicar por 1,01
Somar 10% é multiplicar por 1,1 (o mesmo que 1,10)

Também é comum alguns alunos cometerem erros como, pensarem que multiplicar por 1,3 é o mesmo que somar 3%. Multiplicar por 1,3 (1,30) é o mesmo que somar 30%.

Também podemos usar a multiplicação para aplicar reduções na forma de porcentagem. Por exemplo, reduzir 20% é o mesmo que multiplicar por 0,8. Devemos fazer o seguinte:

1) Transformar a porcentagem em número decimal

2) Tomar os dois dígitos depois da vírgula e calcular 100 - este valor, depois dividir o resultado por 100

3) Aplicar a redução percentual será o mesmo que multiplicar o valor original por esta fração.

Da mesma forma:
Aplicar desconto de 1% é o mesmo que multiplicar por 0,99
Aplicar desconto de 5% é o mesmo que multiplicar por 0,95
Aplicar desconto de 10% é o mesmo que multiplicar por 0,9
Aplicar desconto de 15% é o mesmo que multiplicar por 0,85
Aplicar desconto de 20% é o mesmo que multiplicar por 0,8
Aplicar desconto de 25% é o mesmo que multiplicar por 0,75
Aplicar desconto de 30% é o mesmo que multiplicar por 0,7
Aplicar desconto de 40% é o mesmo que multiplicar por 0,6
Aplicar desconto de 50% é o mesmo que multiplicar por 0,5
...

Exercícios

E18) Por qual fração irredutível um número deveria ser multiplicado para que resulte em:
a) Aumento de 20%
b) Redução de 20%
c) Aumento de 15%
d) Aumento de 5%
e) Aumento de 100%
f) Aumento de 200%
g) Redução de 14%
h) Redução de 9%
i) Redução de 35%
j) Redução de 90%

E19) Um número sofre aumento ou redução, e de qual porcentagem, ao ser multiplicado por:
a) 1,2
b) 0,93
c) 0,7
d) 1,23
e) 0,8
f) 1,8
g) 0,98
h) 2,0
i) 0,3
j) 3,0

Porcentagens combinadas

Muitos problemas de porcentagem envolvem aumentos ou reduções seguidos. Em alguns casos as porcentagens podem ser somadas, em outros casos devem ser multiplicadas, depende apenas de um fator: sobre o quê está sendo aplicada a porcentagem.

Porcentagens aditivas:
São aquelas em que todos os aumentos ou reduções são aplicados sobre o mesmo valor base. Nesse caso, basta somar as porcentagens quando forem aumentos e subtrair quando forem reduções.

Porcentagens multiplicativas:
São aquelas que devem ser aplicadas não sobre o mesmo valor base, mas pelo valor resultante depois que a porcentagem anterior foi aplicada.

Porcentagens aditivas e multiplicativas

Exemplo:
A escola de João oferece aos alunos, vários tipos de descontos sobre o valor da mensalidade:
a) Desconto de 10% sobre a mensalidade para quem tem algum irmão na escola
b) Desconto de 10% sobre a mensalidade para quem já estudou na escola no ano anterior
c) Desconto de 10% sobre a mensalidade para quem participa das equipes de esporte da escola

Se João tem direito a esses três descontos, quanto pagará, se a mensalidade normal é R$ 500,00?

Nesse caso hipotético, observe que todos os descontos são aplicados sobre o valor da mensalidade, e são independentes. Se a mensalidade é R$ 500,00, Um aluno pode ter R$ 50,00 de desconto (10% sobre R$ 500,00) caso tenha algum irmão na escola, mais R$ 50,00 (10% sobre R$ 500,00) se tiver estudado na escola no ano anterior, e mais R$ 50,00 (10% sobre R$ 500,00) caso participe de uma equipe de esportes na escola. O desconto total será

R$ 50,00 x 3 = R$ 150,00, o equivalente a 30% de R$ 500,00
João pagará apenas R$ 350,00.

Como as três porcentagens foram aplicadas sobre o mesmo valor, elas podem ser acumuladas através de soma, ou seja, 10%+10%+10% = R$ 500,00

Resposta: O aumento total foi de 30%, João pagará apenas R$ 350,00 de mensalidade.

OBS: Em casos como este, quando a escola ou empresa não quer dar aumentos muito grandes, acrescenta uma ressalva: "Os aumentos não são cumulativos". Isto significa que não podem ser somados como fizemos nesse problema. Valerá não mais a matemática, mas a regra que for estipulada pela escola ou empresa.

Exercícios

E20) Dois aumentos seguidos de 20% equivalem a um aumento de quanto?

E21) Duas reduções seguidas de 10% equivalem a uma redução de quanto?

E22) Um aumento de 10%, seguido de uma redução de 10%, equivale a aumento ou redução, e de quanto?

E23) Uma mercadoria teve seu valor aumentado em 25%. De quanto deverá ser reduzida, percentualmente, para que retorne ao valor original?

E24) Uma mercadoria teve um aumento de 30%, depois uma redução de 20%. O preço final aumentou ou diminuiu, e de qual porcentagem?

Questões resolvidas

Q1) Em um certo dia, faltaram 20% dos 300 alunos de uma escola. Desses alunos em falta, 40% eram meninos. Qual foi o número total de meninos que faltaram? Esses meninos faltosos representam que porcentagem do número total de alunos?

Os meninos são 40% de 20% de 300 = 0,4 x 0,2 x 300 = 24
Esses 24 meninos faltosos correspondem a 24/300 do total de alunos da escola, ou seja, 8/100 = 8%.
Também poderíamos calcular esta porcentagem multiplicando 40% por 20%:

40% de 20% = 0,4 x 0,2 = 0,08

Para converter um número decimal em porcentagem, tomamos o número formado pelos dois dígitos decimais depois da vírgula. São portanto 8%.

Resposta: 24 meninos e 8%

Q3 (CM) Um estacionamento cobrava R$ 5,00 por três horas de utilização e agora passou a cobrar R$ 5,00 por duas horas. O percentual de aumento do preço, cobrado pelo estacionamento, em relação ao preço inicial, foi de:

(A) 33% (B) 45% (C) 50% (D) 60% (E) 67%

Solução:
Cobrava em reais, 5/3 por hora. Passou a cobrar, em reais, 5/2 por hora. Para saber o aumento em fração basta dividir o preço novo pelo preço antigo.

$$\frac{5}{2} \div \frac{5}{3} = \frac{3}{2}$$

A fração 3/2 corresponde a um aumento de 50%.

Resposta: (C)

Q5 (CM) Tiago, André e Gustavo foram premiados em um "bolão" do Campeonato Brasileiro. Tiago vai ficar com 40% do valor total do prêmio enquanto André e Gustavo vão dividir o restante igualmente entre dois. Se Gustavo vai receber R$ 600,00, então o prêmio total é:

(A) igual a R$ 1500,00.
(B) maior que R$ 2000,00.
(C) menor que R$ 2500,00.
(D) igual a R$ 2500,00.
(E) maior que R$ 3000,00.

Solução:
Tiago = 40%, André = 30%, Gustavo = 30%
R$ 600,00 / 0,3 = R$ 2.000,00

Resposta: (B)

Q7) (CM) A empresa de calçados "Calçabem" vendeu 400 e 480 pares, respectivamente, nos meses de outubro e novembro, apresentando um percentual de aumento nas vendas superior ao do mesmo período no ano anterior. Para o mês de dezembro era esperado um percentual de aumento, em relação a novembro, maior que o de novembro em relação a outubro, mas o percentual de aumento se repetiu, fechando o mês de dezembro com um total, em vendas, de

(A) 526 pares (B) 566 pares (C) 576 pares (D) 726 pares (E) 926 pares

Solução:
O aumento de outubro para novembro foi de 400 para 480, ou seja, 20%.
De novembro para dezembro, o aumento nas vendas foi o mesmo, então as vendas de dezembro somaram 480 x 1,2 = 576 pares.

Resposta: (C)

Q9) (CM) O professor André trabalha 150 horas por mês e ganha R$ 20,00 (vinte reais) por hora trabalhada. No mês que vem, ele vai ter um aumento de 25% sobre o valor da hora trabalhada. Quanto o professor André vai passar a receber em um ano de trabalho com o seu novo salário?

(A) R$ 54000,00 (B) R$ 45000,00 (C) R$ 36000,00 (D) R$ 9000,00 (E) R$ 3750,00

Solução:
Novo valor da hora de aula: R$ 20,00 x 1,25 = R$ 25,00
12 meses x 150 horas x R$ 25,00 = R$ 45.000,00

Resposta: (B)

Q11) (CM) Pablo foi promovido e recebeu um aumento de 17%, passando a receber um salário de R$ 1111,50. O salário que Pablo recebia antes do aumento era de

(A) R$ 980,00 (B) R$ 890,00 (C) R$ 970,00 (D) R$ 840,00 (E) R$ 950,00

Solução:
R$ 1111,50 / 1,17 = R$ 950,00

Resposta: (E)

Questões propostas

Q31) (CM) Um prêmio de R$ 1500,00 será repartido entre os três primeiros colocados de uma maratona. Ao primeiro colocado caberá 53% dessa quantia; ao segundo, 1,5/5 e, ao terceiro, caberá a quantia restante. A quantia que o terceiro colocado receberá é de

(A) R$ 240,00 (B) R$ 245,00 (C) R$ 250,00 (D) R$ 260,00 (E) R$ 255,00

Q33) (CM) O tempo passou e, em paz, os reinos prosperaram. O Rei Kiroz, que havia envelhecido, organizou um torneio cujo vencedor seria o novo Rei e, além disso, poderia se casar com sua filha, a linda princesa Stella. Muitos jovens, príncipes ou não, apareceram para a disputa da coroa e da mão da princesa. Na primeira prova do torneio, 3/16 dos jovens candidatos a Rei foram eliminados. Qual das alternativas abaixo expressa a quantidade de jovens que passaram para a segunda prova do torneio?

(A) 18,25% (B) 18,75% (C) 43,66% (D) 81,25% (E) 81,75%

Q35) (CM) Em uma caixa há 400 tipos de frutas. Dessas, 30% são abacaxis, 50% são laranjas, 15% são abacates e o restante são mangas. A quantidade de mangas nessa caixa é:

(A) 120 (B) 30 (C) 60 (D) 20 (E) 50

Q41) (CM) O número de alunos de uma escola passou de 900 para 1350. Em relação ao número inicial, o aumento no número de alunos foi de

(A) 50% (B) 55% (C) 60% (D) 65% (E) 70%

Respostas dos exercícios

E1) a) R$ 20,00 b) 3 quilos c) 5 quilômetros d) 4 horas e) 15 pessoas
f) 28 minutos g) R$ 4,80 h) R$ 120,00 i) 3.000 pessoas j) 9 laranjas
E2) a) 50% b) 70% c) 60% d) 12,5% e) 40% f) 75% g) 125% h) 100% i) 2% j) 30%
E4) a) 56% b) 81% c) 20% d) 4% e) 0,5%
E6) a) 15% b) 8% c) 8% d) 12% e) 25%
E7) a) R$ 840,00 b) 60 km/h c) 10.300 pessoas d) R$ 414,00 e) R$ 2.000.000.000,00
E8) a) R$ 5.500,00 b) R$ 1,25 c) R$ 13,00 d) R$ 28,00 e) R$ 7,50
E9) a) 15% b) 11% c) 8% d) 40% e) 22%
E10) a) R$ 20,00 b) R$ 10,00 c) R$ 75,00 d) R$ 60,00 e) R$ 72,00
E13) R$ 1010,00
E14) R$ 450,00
E15) R$ 24,00
E16) a) Lucro de 10% b) Prejuízo de 4% c) Lucro de 20% d) Prejuízo de 5% e) Lucro de 15%
E18) a) 6/5 b) 4/5 c) 23/20 d) 21/20 e) 2 f) 3 g) 43/50 h) 91/100 i) 13/20 j) 1/10
E19)
a) Aumento de 20% b) Redução de 7% c) Redução de 30% d) Aumento de 23%
e) Redução de 20% f) Aumento de 80% g) Redução de 2% h) Aumento de 100%
i) Redução de 70% j) Aumento de 200%
E20) 44%
E21) 19%
E22) Redução de 1%
E23) 20%
E24) Aumento de 4%

Respostas das questões propostas

Q31) Resposta: (E)
Q33) Resposta: (D)
Q35) Resposta: (D)
Q41) Resposta: (A)
Q42) Resposta: (C)
Q43) Resposta: (C)
Q44) Resposta: (E)
Q45) Resposta: (B)
Q46) Resposta: (D)

■

Obtenha a versão mais recente em www.laercio.com.br

Capítulo 10

Conjuntos

Teoria dos conjuntos

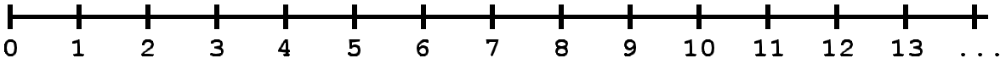
A teoria dos conjuntos é necessária para o entendimento de toda a matemática a partir do 6º ano. Neste capítulo faremos uma rápida introdução básica sobre o assunto.

O conjunto dos números naturais

Conjunto é uma coleção de elementos. Um dos primeiros conjuntos com o qual lidamos é sem dúvida o conjunto dos números naturais, representado por N. Este é um conjunto infinito.

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, ...}

O conjunto N pode ser representado em uma *reta numerada* ou *reta numérica*. Os números são dispostos em uma sequência crescente. Quanto mais à direita nessa reta, maior é o número.



Reta numérica que representa o conjunto dos números naturais

O conjunto dos números racionais positivos

O conjunto Q+ é o conjunto dos números racionais positivos. Este conjunto tem todos os números naturais e mais todas as frações. Assim como o conjunto N, o conjunto Q+ também é infinito, porém é um tipo de infinito muito mais denso. Por exemplo, entre dois simples números naturais, 0 e 1, existem infinitos números racionais positivos. Apenas para citar alguns:
1/2, 1/3, 1/4, ..., 1/100, 2/3, 2/5, 2/7, 2/9, ..., 3/4, 3/5, 3/7, 3/8, 3/10, ..., 21/37, 125/1042, ...

Exemplos de conjuntos

Nem só de número vivem os conjuntos. Podemos ter conjuntos de qualquer tipo de objeto:

Exemplos:
Conjunto dos dias da semana = {domingo, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado}
Conjunto dos quatro planetas mais próximos do Sol = {Mercúrio, Vênus, Terra, Marte}

Conjunto das notas musicais = {dó, ré, mi, fá, sol, lá, si}
Conjunto das frutas de uma cesta = {banana, laranja, maçã, pêra, abacate}
Conjunto dos parafusos de um motor = {parafuso-1, parafuso-2, parafuso-3, ..., parafuso-n}

Pertinência

Quando um elemento está dentro de um conjunto, dizemos que este elemento *pertence* ao conjunto. O símbolo matemático para a pertinência é $\in$.

Exemplos:
$3 \in N$
bola $\in$ {bola, boneca, bicicleta, carro}
José $\in$ NJ, onde NJ é o conjunto dos nomes que começam com a letra J
$3/5 \in Q+$

Quando um elemento não pertence a um conjunto, usamos o símbolo $\notin$.

Exercícios

E1) Escreva o conjunto dos numerais pares de 2 algarismos, de tal forma que esses dois algarismos sejam iguais.

E2) O que está errado nas seguintes notações de conjuntos:
a) {1, 2, 3, 4 e 5}
b) {1, 2, 3, 3, 4}

E5) Entre as três formas abaixo, qual é a errada para representar o conjunto vazio?
Ø , {}, {Ø}

Representação por enumeração

Existem várias formas para definir um conjunto. Uma forma usual é a mostrada acima. Fazemos uma lista dos elementos, separados por vírgulas, e entre chaves {}.

Normalmente os elementos de um conjunto são do mesmo tipo, mas nada impede que criemos conjuntos de elementos de tipos diferentes.

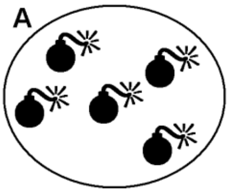
Exemplo:
A = { 1, 2, 3, {1, 2}, 4, 5}

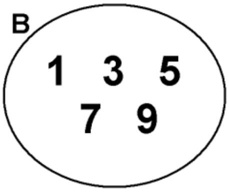
O conjunto A acima tem cinco números naturais (1, 2, 3, 4, 5) e um conjunto com os elementos 1 e 2. Como vemos, nada impede que um conjunto seja elemento de outro.

Exemplo:
A = {N, Q+} = conjunto dos dois conjuntos numéricos citados neste capítulo.

Representação por diagrama

Este método é equivalente a listar os elementos entre chaves. A diferença é que ao invés de usar chaves, é desenhado um diagrama com os elementos indicados através de símbolos.





Nos dois exemplos acima, temos um conjunto A com cinco bombinhas e um conjunto B com os números naturais ímpares menores que 10.

Representação por propriedade

Este é o método mais formal para definir um conjunto. Considere por exemplo o conjunto:

P = { 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ...}

É o conjunto dos números naturais maiores que 4. Pode ser escrito das seguinte forma:

P = { x | x∈N e x>4}

Lê-se: *P é o conjunto dos elementos x tais que x pertence ao conjunto dos números naturais e x é maior que 4.*

Conjunto vazio

Conjunto vazio é aquele conjunto que não tem elemento algum. Não existe diferença entre um conjunto vazio de laranjas e um conjunto vazio de planetas. Ambos são a mesma coisa, ou seja, o vazio é único.

Representamos o conjunto vazio pelo símbolo ∅ ou { }.

Conjunto unitário

Um conjunto unitário é um conjunto que tem um só elemento. Existem infinitos conjuntos unitários.

Exemplos:
{3}
{laranja}
{Sol}
{Drake}
{Josh}
...

Exercícios

E7) Enumere os seguintes conjuntos, colocando os elementos entre chaves e separados por vírgulas:
a) { x | x é número natural e x é par }
b) { x | x/2 = 20 }
c) { x | x é número natural e x é múltiplo de 3}
d) { x | x é número natural e x > 50}
e) { x | x é um dia da semana}
f) { x | x é o nome de um mês}

g) { x | x é um número natural e x < 20}
h) { x | x é um número natural e x deixa resto 0 ao ser dividido por 7}

E8) Verifique quais dos conjuntos abaixo são iguais ao conjunto vazio
a) {x | x∈{1, 2, 3} e x∈{4, 5, 6} }
b) { x | x∈N e x.2=7}
c) { x | x∈N e x.x = 20}
d) { x | x∈∅}
e) { x | x é o nome de um mês e x começa com a letra T}

Subconjunto

Um subconjunto é um conjunto formado por alguns elementos de um outro conjunto.

Exemplo:
A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
B = {1, 2, 5}

Neste exemplo dizemos que B é subconjunto de A, pois todo elemento de B também é elemento de A. Isso é o mesmo que dizer que "B está contido em A", e é escrito como:

$B \subset A$

Dizer que B está contido em A é o mesmo que dizer que A contém B. Nesse caso usamos o símbolo ⊃.

Exemplo:
{1, 2, 3, 4, 5, 7} ⊃ {2, 3, 5}

É muito comum representar as relações entre conjuntos através de gráficos chamados *diagramas de Venn*.

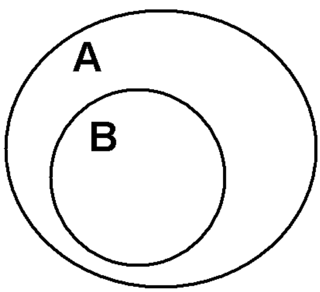


Figura 1

Diagrama de Venn para $B \subset A$.

Conjunto universo

Conjunto universo é um conjunto que contém todos os conjuntos, ou seja, para qualquer conjunto A, A⊂U. É uma noção difícil de entender, por ser abstrata. Muitas vezes estamos interessados não no maior conjunto universo existente, mas em uma parte do universo. Dependendo da aplicação, podemos considerar o conjunto universo como:

- O conjunto dos números naturais
- O conjunto dos números racionais positivos

- O conjunto dos números pares
- O conjunto dos múltiplos de 5
- O conjunto dos habitantes de uma cidade
- O conjunto das cidades de um país
- O conjunto dos números naturais de 0 a 10

Exercícios

E9) Sendo A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, indique se as sentenças são verdadeiras ou falsas
a) $\varnothing \subset A$
b) $\varnothing \in A$
c) $2 \in A$
d) $3 \in A$
e) $\{2, 3\} \in A$
f) $\{2, 3\} \subset A$
g) $7 \in A$
h) $4 \subset A$
i) $\{4\} \subset A$
j) $A \supset \{4, 5, 6\}$
k) $A \subset A$
l) $N \subset Q+$

E13) Enumere os seguintes conjuntos infinitos, colocando os elementos entre chaves, separados por virgulas.
a) Conjunto dos números naturais pares
b) Conjunto dos números naturais múltiplos de 3
c) Conjunto dos números naturais múltiplos de 5
d) Conjunto dos números naturais múltiplos de 3 e 5 ao mesmo tempo
e) Conjunto dos números naturais que são múltiplos de 3 mas não são múltiplos de 5
f) Conjunto dos números naturais que são quadrados perfeitos
g) Conjunto dos números naturais que deixam resto 2 ao serem divididos por 5
h) Conjunto dos números naturais formados apenas pelos algarismos 2, 3 e 5
i) Conjunto dos números naturais que multiplicados por 0 dão resultado 0
j) Conjunto dos números naturais que deixam resto 2 ao serem divididos por 12 ou por 20

Operações com conjuntos

Assim como fazemos com os números, operações aritméticas como adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e outras, fazemos também operações com conjuntos. As operações que vamos estudar aqui são as mais comuns:

- União
- Interseção
- Diferença
- Complementar

União de conjuntos

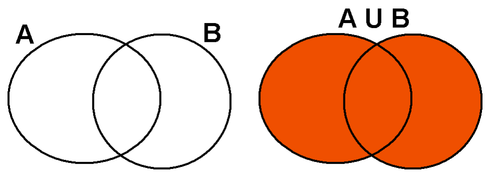
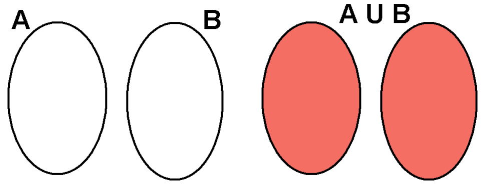
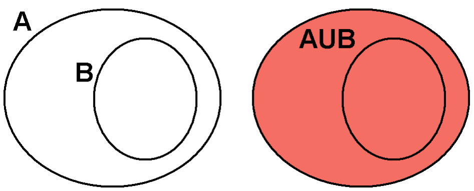
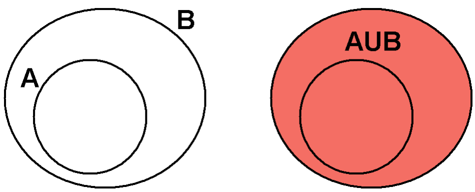
A união de dois conjuntos A e B (escreve-se $A \cup B$) é uma operação que resulta em um terceiro conjunto que tem todos os elementos de A e todos os elementos de B.

Exemplo:

Se A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e B = {5, 6, 7, 8}, então
A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

Note que todos os elementos de A estão em A ∪ B. Todos os elementos de B também estão em A ∪ B. Os elementos 7 e 8 estão em A e em B, logo estarão na união, porém são contados uma só vez, já que um conjunto não pode ter elementos repetidos.

Os diagramas abaixo mostram exemplos da união de conjuntos.

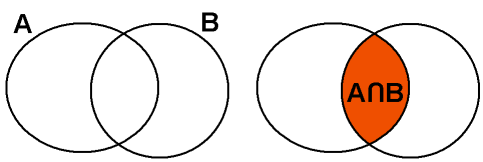
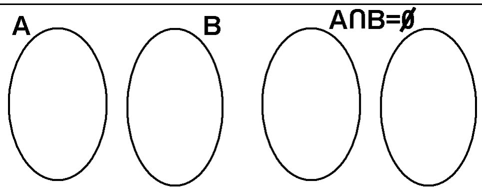
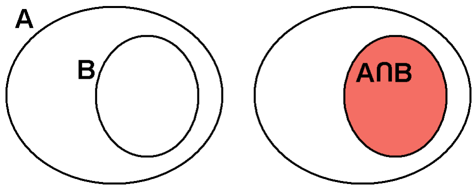
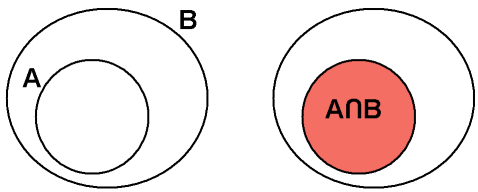
	A figura mostra o caso mais comum, no qual existem elementos que pertencem somente a A, elementos que pertencem somente a B, e elementos que pertencem a A e B simultaneamente.
	Neste exemplo o conjunto união tem duas partes que não se encontram, pois não existem elementos que pertencem a A e B ao mesmo tempo. Nesse caso dizemos que os conjuntos A e B são DISJUNTOS.
	Nesse caso o conjunto B está contido no conjunto A, ou seja, B ⊂ A. Quando isto ocorre, o conjunto A ∪ B é o próprio conjunto A. Se B ⊂ A então A ∪ B = A
	Nesse caso o conjunto B contém o conjunto A, A está contido em B, o que é a mesma coisa. Quando isto ocorre, o conjunto A ∪ B é o próprio conjunto B. Se A ⊂ B então A ∪ B = B

Interseção de conjuntos

A interseção dos conjuntos A e B, escrita A ∩ B, é uma operação que resulta em um conjunto com os elementos que pertencem a A e B simultaneamente.

Exemplo:
Se A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e B = {5, 6, 7, 8}, então
A ∩ B = {5, 6}

Os diagramas abaixo mostram exemplos da união de conjuntos.

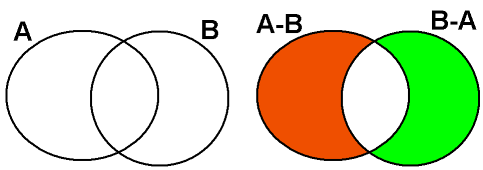
	A figura mostra o caso mais comum, no qual existem elementos que pertencem somente a A, elementos que pertencem somente a B, e elementos que pertencem a A e B simultaneamente.
	Neste exemplo o conjunto união tem duas partes que não se encontram, pois não existem elementos que pertencem a A e B ao mesmo tempo. Nesse caso dizemos que os conjuntos A e B são DISJUNTOS. $A \cap B = \varnothing$
	Nesse caso o conjunto B está contido no conjunto A, ou seja, $B \subset A$. Quando isto ocorre, o conjunto $A \cap B$ é o próprio conjunto B. Se $B \subset A$ então $A \cap B = B$
	Nesse caso o conjunto B contém o conjunto A, A está contido em B, o que é a mesma coisa. Quando isto ocorre, o conjunto $A \cap B$ é o próprio conjunto B. Se $A \subset B$ então $A \cap B = A$

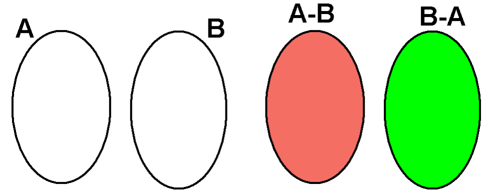
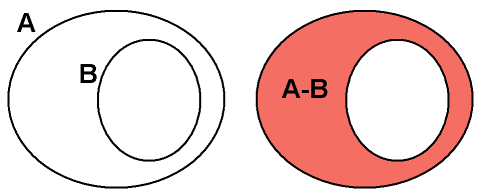
Diferença de conjuntos

Esta é outra operação com conjuntos que tem grande utilidade. Dados dois conjuntos A e B, a diferença de conjuntos, indicada como A – B, é o conjunto dos elementos que pertencem a A e não pertencem a B. Para definir B – A, basta trocar os papéis de A e B, ou seja, é o conjunto dos elementos que pertencem a B mas não pertencem a A.

Exemplo:
Se A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e B = {5, 6, 7, 8}, então
A – B = {1, 2, 3, 4}
B – A = {7, 8}

A diferença de conjuntos também pode ser representada em diagramas de Venn:

	A figura mostra o caso mais comum, no qual existem elementos que pertencem somente a A, elementos que pertencem somente a B, e elementos que pertencem a A e B simultaneamente.

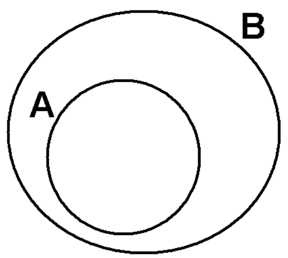
	No caso de conjuntos disjuntos (A∩B=∅), temos: A – B = A B – A = B
	Nesse caso o conjunto B está contido no conjunto A, ou seja, B ⊂ A. A figura mostra A – B na área hachurada. Além disso, temos nesse caso, B – A = ∅.

Exercícios

E15) Determine A∪B, A∩B, A-B e B-A para os seguintes conjuntos:
a) A={1, 2, 4, 5, 6, 7} e B = {2, 4, 6, 8}
b) A={1, 3, 5, 7, 9} e B={0, 2, 4, 6, 8}
c) A={0, 3, 6, 9, 12, 15, 18} e B={0, 9, 18}
d) A=conjunto das 26 letras do alfabeto, B={a, e, i, o, u}
e) A={3, 4, 5}, B={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

Complementar

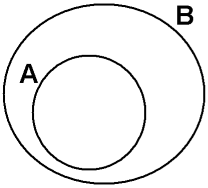
Esta é outra operação com conjuntos, tão importante quanto a união, a interseção e a diferença, que acabamos de apresentar. Entretanto, na união, interseção e diferença, os conjuntos A e B podem ser quaisquer. No complementar, é preciso que um conjunto seja subconjunto do outro, como na figura abaixo.

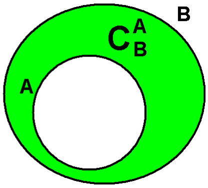


Dado que A é subconjunto de B, ou seja, A ⊂ B, definimos o complementar de *A em relação a B* como o conjunto dos elementos que pertencem a B mas não pertencem a A, ou seja, B-A. Note que o complementar é na verdade uma diferença de conjuntos, mas restrita ao caso em que o conjunto A é subconjunto de B. Escrevemos:

C_B^A ou $C_B A$

O diagrama abaixo mostra o complementar de A em relação a B.





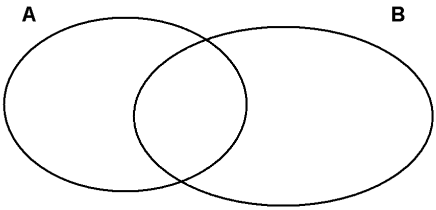
Exemplo:
Considere A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} e B = {3, 4, 5}
Então $C_A B$ = {1, 2, 6, 7, 8}

Exercícios

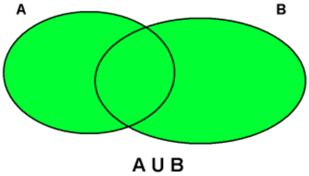
E16) Determine o complementar de A em relação a B
a) A={0, 1, 2} e B={0, 1, 2, 3, 4, 5}
b) A={1/2, 1/3} e B={1/2, 1/3, 1/5, 1/7}
c) A= {2, 3, 5, 7} e B={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
d) A={1, 2, 3} e B={2, 3, 4, 5, 6}

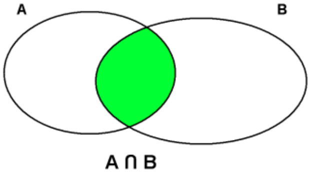
Diagrama de Venn

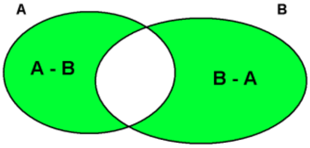
Vimos que o diagrama de Venn é uma forma para representar conjuntos e as suas operações. No caso de dois conjuntos, a foram geral de representação é a mostrada abaixo. Nela estamos levando em conta a possibilidade de existirem elementos que pertencem a A e B ao mesmo tempo.



A partir daí podemos indicar a união, interseção e diferença entre os conjuntos.







Número de subconjuntos

Um outro problema interessante é determinar o número de subconjuntos possíveis de um conjunto dado. Por exemplo, se tivermos um conjunto A = {1, 2, 3}, podemos formar os seguintes subconjuntos:

∅ (vazio)
{1}

{2}
{3}
{1, 2}
{1, 3}
{2, 3}
{1, 2, 3}

Entre os subconjuntos de A, sempre constarão o próprio A e o conjunto vazio. Temos que adicionar então os subconjuntos possíveis com 1 elemento, com 2 elementos, e assim por diante. Podemos calcular facilmente o número de subconjuntos de um conjunto dado usando a seguinte fórmula.

É dado um conjunto A, finito, com n elementos. O número de subconjuntos de A é igual a

$$2^n$$

No nosso exemplo, o conjunto A = {1, 2, 3} tem 3 elementos. Então o número de subconjuntos de A é $2^3 = 8$.

Se for pedido o número de subconjuntos <u>não vazios</u>, temos que descontar 1 desse total. Portanto, o número de subconjuntos não vazios de um conjunto com n elementos é

$$2^n - 1$$

Exercícios

E21) Utilizando diagramas de Venn, verifique se as afirmações são falsas ou verdadeiras para quaisquer conjuntos A e B

a) $A \subset A$
b) $\varnothing \subset A$
c) $\varnothing \in A$
d) $A \subset (A \cup B)$
e) $B \subset (A \cup B)$
f) $A \subset (A \cap B)$
g) $(A \cup B) \subset A$
h) $(A \cap B) \subset A$

E23) Qual é o número de subconjuntos não vazios que podem ser formados com os elementos do conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}?

E25) Sendo A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, determine $C_B A$

E33) Se B = {{1, 2}, {2}, {3}}, é correto afirmar que {2, 3} é subconjunto de B?

Conjunto das partes

Já vimos como calcular o número de subconjuntos possíveis de um conjunto A dado. Se formarmos um conjunto com todos esses conjuntos, teremos o chamado *conjunto das partes de A*. Indicamos este conjunto como P(A). Já vimos um exemplo com A = {1, 2, 3}, e formamos os seguintes subconjuntos:

$\varnothing$ (vazio)
{1}
{2}
{3}
{1, 2}
{1, 3}
{2, 3}
{1, 2, 3}

Então podemos determinar o conjunto P(A).

P(A) = { $\varnothing$, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3} }

Note que os elementos de P(A) são conjuntos.

Note ainda que para qualquer conjunto A, temos:

$\varnothing \in P(A)$
$A \in P(A)$

Ou seja, o conjunto vazio e o conjunto A sempre serão elementos de P(A).

A fórmula do número de subconjuntos pode ser escrita da seguinte forma:

$n(P(A)) = 2^{n(A)}$

ou seja, o número de elementos do conjunto das partes (conjunto dos subconjuntos de A) é igual a 2 elevado ao número de elementos de A.

Exemplo:
P(X) é o conjunto das partes de um conjunto X qualquer. Sendo A = {0, 1, 2, 3} e B = {2, 3, 5}, coloque V para as sentenças verdadeiras e F para as falsas.

1. ( ) $A \subset P(A)$
2. ( ) $(A \cup B) \subset P(B)$
3. ( ) $\varnothing \not\subset (A \cap B)$
4. ( ) $C_B^A \cup B = B$

Solução:
A = {0, 1, 2, 3}
B = {2, 3, 5}
P(A) = {$\varnothing$, {0}, {1}, {2}, {3}, {0,1}, {0,2}, {0,3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {0,1,2}, {0,1,3}, {0,2,3}, {1,2,3}, {1,2,3,4} } (16 elementos = 2^4)
P(B) = { $\varnothing$, {2}, {3}, {5}, {2,3}, {2,5}, {3,5}, {2,3,5} }

1. É falsa, pois o correto é $A \in P(A)$, e não $A \subset P(A)$
2. Falsa
3. Falsa. O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.
4. Falsa. A expressão C_B^A só faz sentido quando A é subconjunto de B.

Resposta: FFFF

Exercícios

E17) Determine P(A)
a) A={0, 1, 2}
b) A={10, 20, 30}
c) A={2, 4}
d) A= {a, b, c}
e) A= { ∅, {∅}}
f) A = {1, 2, 3, 4}

Questões resolvidas

Q1) (CM) Sejam os conjuntos numéricos A = {1,2,3,... ,9,10} e B = {0,1,2,3}. Marque a alternativa correta.

(A) O conjunto A é infinito.
(B) A∩B = {0,1,2,3}
(C) A∪B = A
(D) A∪B possui 11 elementos distintos.
(E) A ⊃ B

Solução:
A = Falsa
B = Falsa
C = Falsa
D = Verdadeira
E = Falsa

Resposta: (D)

Q3) (CM) Sendo A = {conjunto das letras da palavra "arara"} e B={conjunto das letras da palavra "cara"}; podemos afirmar que o número de elementos do conjunto A – B é igual a:

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

Solução:

A = {a, r}
B = {c, a, r}
A – B = ∅
n(A – B) = 0

Resposta: (E)

Q7) (CM) Sejam os conjuntos A, dos números primos, e B, dos números pares. Podemos afirmar que:

(A) A∩B = ∅
(B) A∪B = N
(C) A∩B possui um único elemento
(D) A∩B = A
(E) A∩B = B

Solução
A = { 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...}
B = {0, 2, 4, 6, 8, 10, ...}
$A \cup B$ = {0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 22, ...}
$A \cap B$ = {2}

Então a única verdadeira é (C)

Resposta: (C)

Q8) (CM) Considere os conjuntos *A* e *B*, abaixo caracterizados:

A: entre seus elementos encontram-se os 10 primeiros números naturais, os 10 primeiros números naturais pares e os 10 primeiros números naturais ímpares, e somente esses números;

B: constituído pelos números naturais que são, ao mesmo tempo divisíveis por 4 e menores que 36.

Com relação a esses conjuntos, podemos afirmar que:

(A) o conjunto A possui 30 elementos.
(B) o conjunto B possui 10 elementos.
(C) $B \subset A$.
(D) B – A = {20, 24, 28, 32}.
(E) $A \cap B$ = {4, 8, 12, 16}.

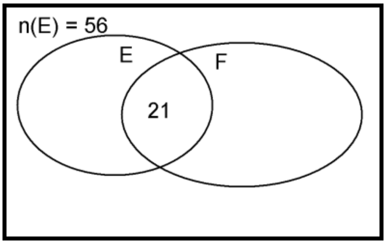
Solução:
A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}
B = {0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32}

Resposta: (D)

Q11) (CM) Uma pesquisa foi feita com os alunos da 7ª série do Colégio Recanto Feliz. Verificou-se que 56 alunos lêem revistas sobre esportes, 21 lêem revistas sobre esportes e sobre fofocas, 106 lêem apenas um desses tipos de revistas e 66 não lêem revistas sobre fofocas. O número de alunos que não lêem revistas sobre esportes e também não lêem revistas sobre fofocas é igual a:

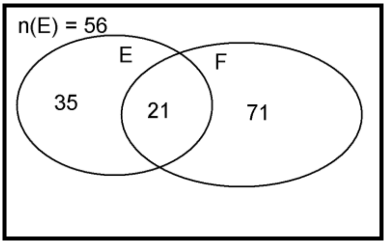
(A) 10 alunos (B) 11 alunos (C) 21 alunos (D) 31 alunos (E) 158 alunos

Solução:
Começamos a montar o diagrama de Venn com as informações dadas. Chamaremos os conjuntos de E e F, dos leitores de revistas de esportes e de fofocas, respectivamente. O problema dá que o número de elementos de E é 56. O número de alunos que lêem ambas as revistas é 21.



n(E-F) = 56-21 = 35
106 lêem só um tipo de revista
n(F-E) =
106 – 35 = 71

➔



Os alunos que lêem apenas revistas de esporte são 56 – 21 = 36
Os alunos que lêem um só tipo de revista são representados por E-F e F-E. O número de elementos de F-E é 106 – 35 = 71, como mostra o diagrama acima.

Os alunos que não lêem revistas sobre fofocas (66) são todos aqueles que estão no exterior do conjunto F. Destes, 35 estão dentro de E. Então os que não lêem revista alguma são
66 – 35 = 31

Resposta: (D) 31

Questões propostas

Q23) (CM) Sobre o conjunto $A = \{ 3, 5, \{ 1, 2 \}, 7 \}$, é correto afirmar que:

(A) $\{3, 5\} \subset A$ (B) $\{3, 7\} \in A$ (C) $\{1, 2\} \subset A$ (D) $5 \subset A$ (E) $\{3\} \in A$

Q26) (CM) Seja D o conjunto formado pela primeira letra dos dias da semana e M o conjunto formado pela primeira letra dos meses do ano. Logo pode-se afirmar que:

(A) D ∩ M = {d, q}
(B) D ∪ M = {a, d, f, j, m, n}
(C) D – M = {t, s}
(D) M – D = {a, f, j, m, n, o}
(E) D ∩ M = { }

Q28) (CM) O corpo de bombeiros de uma determinada cidade, em um ano, prestou assistência a diversas vítimas de acidentes. Entre essas vítimas, 1/4 sofreu queimaduras; 7/20 sofreu intoxicação e 1/5 sofreu, simultaneamente, queimaduras e intoxicação. Do total de vítimas assistidas, a fração que representa a quantidade de pessoas que não sofreram queimaduras nem intoxicação é igual a:

(A) 1/2 (B) 1/3 (C) 1/4 (D) 2/3 (E) 3/5

Q29) (CM) Considere um número natural N. Some 2 a este número, divida o resultado por 2 e, em seguida, acrescente 5. Depois, subtraia 4 e multiplique o resultado por 100. Se depois de todas essas operações matemáticas realizadas, o resultado obtido foi de 300, podemos afirmar que o número N é elemento do conjunto:

(A) {12, 15} (B) {1, 9} (C) {2, 5} (D) {0,10} (E) {20, 22}

Q31) (CM) Numa classe de 33 alunos da quinta série do CMB, tem-se: 18 alunos que gostam de futebol, 24 que gostam de vôlei, 12 de basquete, 11 de futebol e vôlei, 7 de vôlei e basquete, 7 de futebol e basquete e 3 que gostam dos três esportes. Baseando-se nessas informações, pode-se afirmar que o número de alunos dessa classe que não gostam de nenhum desses esportes é igual a:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Q32) (CM) No conjunto dos números naturais, seja M(x) o conjunto dos múltiplos de x. Então, podemos afirmar que:

(A) $M(6) \cap M(3) \cap M(4) = M(12)$
(B) $M(4) \cap M(8) = M(4)$
(C) $M(2) \cap M(4) \cap M(8) = M(4)$
(D) $M(3) \cap M(4) \cap M(6) = M(6)$
(E) $M(3) \cap M(6) = M(3)$

Q33) (CM) Sejam A e C conjuntos de números tais que A = {1, 6, 8} e C = {2, 4, 9}. Observe as afirmações seguintes e associe V quando for verdadeira e F quando for falsa.

I – A e C são conjuntos disjuntos, isto é, $A \cap C = \varnothing$
II – $1 \not\in C$
III – $A \cup C = \{\}$
IV – $A \not\subset N$, sendo N o conjunto dos números naturais.

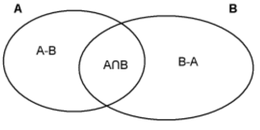
A sequência correta é:

(A) FVFF (B) FVVF (C) VVVF (D) VFVF (E) VVFF

Respostas dos exercícios

E1) {22, 44, 66, 88}
E2) a) Não se usa "e" na enumeração de conjuntos; b) não são representados elementos repetidos.
E5) {Ø} é a errada
E7)
a) { 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}
b) { 40 }
c) { 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...}
d) { 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, ...}
e) { domingo, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado }
f) { janeiro, fevereiro, março, abril, maio, junho, julho, agosto, setembro, outubro, novembro, dezembro }
g) {0, 1, 2, 3, 54, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}
h) { 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, ...}
E8) a, b, c, d, e ➔ todos os conjuntos citados são iguais ao conjunto vazio.
E9) a) V b) F c) V d) V e) F f) V g) F h) F i) V j) V k) V l) V
E13)
a) { 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...}
b) { 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...}
c) { 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, ...}
d) { 0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, ...}
e) { 3, 6, 9, 12, 18, 21, 24, 27, 33, 36, 39, 42, 48, ...}
f) { 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, ...}
g) { 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, ...}

h) { 2, 3, 5, 22, 23, 25, 32, 33, 35, 52, 53, 55, 222, 223, 225, ...}
i) { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, ...} = N
j) { 2, 14, 22, 26, 38, 42, 50, ...}
E15)
a) {1, 2, 4, 5, 6, 7, 8}, {2, 4, 6}, {1, 5, 7}, {8}
b) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, {}, {1, 3, 5, 7, 9}, {0, 2, 4, 6, 8}
c) {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18}, {0, 9, 18}, {3, 6, 12, 15}, {}
d) A, B, conjunto das consoantes, {}
e) B, A, {}, {1, 2, 6, 7, 8}
E16)
a) {3, 4, 5}
b) {1/5, 1/7}
c) {1, 4, 6, 8, 9}
d) Não existe, pois A não é subconjunto de B
E21)



a) V b) V c) F d) V e) V f) F g) F h) V i) V j) V k) V l) V m) V
E23) 63
E25) {7, 8, 9, 10}
E33) NÃO

Respostas das questões propostas

Q23) Resposta: (A)
Q26) Resposta: (D)
Q28) Resposta: (E)
Q29) Resposta: (C)
Q31) Resposta: (B)
Q32) Resposta: (A)
Q33) Resposta: (E)
Q40) Resposta: (D)
Q41) Resposta: (C)

■

Obtenha a versão mais recente em www.laercio.com.br

MATEMÁTICA PARA VENCER, versão de 132 páginas

Capítulo 11

Sistemas de medidas

Medidas de massa

A massa é o que chamamos na vida cotidiana de "peso". Massa é a quantidade de matéria em um objeto. O peso é a força que esta massa sofre sob ação da gravidade. Se transportarmos 1 quilo de feijão para o espaço, ele ficará em órbita, flutuando. Não terá mais peso, pois está em um ambiente sem gravidade. Entretanto sua massa continua valendo 1 quilo. Como estamos sempre lidando com objetos na superfície da terra, os conceitos de massa e peso acabam sendo confundidos e tratados da mesma forma. Na física, é preciso saber a diferença entre essas duas grandezas. Neste livro, quando estivermos nos referindo ao peso de um objeto, estaremos na verdade falando da sua massa.

A unidade padrão de massa

A unidade padrão usada para medida de massa é o *quilograma*. Popularmente é chamado apenas de quilo. É abreviado como kg. Você encontrará entretanto, vários lugares e situações em que o quilograma é usado de forma incorreta.

Exemplos:
- Eu peso 62 quilos: errado, pois o correto é quilogramas. Aceitável na linguagem popular.

- Eu peso 62 kilos: mais errado ainda, a palavra "kilo" não existe. O que existe é o prefixo "quilo", que é abreviado como "k", e é usado para indicar 1000 vezes: quilograma, quilômetro, quilovolt, etc.

- Eu peso 62 k: errado, pois a abreviatura de quilograma é kg, e não k.

As unidades para medida de massa são decimais. São elas:

1 grama = 1 g = 0,001 kg
1 decagrama = 1 dag = 0,01 kg = 10 g
1 hectograma = 1 hg = 0,1 kg = 100 g

OBS: O correto é "o grama", e não "a grama".




1 quilograma
= 1 kg
= 1000 g

1 hectograma (1 hg)
= 0,1 kg
= 100 g

1 decagrama (1 dag)
= 0,01 kg
= 10 g

1 grama (1 g)
= 0,001 kg
= 1 g

1 quilograma é abreviado 1 kg, e vale o mesmo que 1000 gramas
1 hectograma é abreviado 1 hg, e vale o mesmo que 100 gramas, ou 0,1 kg
1 decagrama é abreviado 1 dag, e vale o mesmo que 10 gramas, ou 0,01 kg
1 grama é abreviado 1 g, e vale o mesmo que 0,001 kg

Em consequência, temos
1 kg = 10 hg = 100 dag = 1000 g
1 hg = 10 dag = 100 g
1 dag = 10 g

Exemplo:
Expressar 1,6 kg em gramas, depois em decagramas, depois em hectogramas

1,6 kg = 1,6 . 1000 g = 1600 g
1,6 kg = 1,6 . 100 dag = 160 dag
1,6 kg = 1,6 . 10 hg = 16 hg

Normalmente usamos o quilograma ou o grama para medir massa, mas em questões de provas essas unidades podem aparecer misturadas. É preciso converter todas as medidas para a mesma unidade.

Os submúltiplos do grama

O grama é uma unidade de massa bem pequena. É a massa de um cubo de água com lado igual a 1 cm, na temperatura de 4 graus. Um peso de balança de precisão com 1 cm é bem pequeno, mas eventualmente é preciso trabalhar com medidas menores que 1 grama. Na figura abaixo, se o maior dos pesos é o de 1 grama, os seguintes são os dos submúltiplos do grama.

É difícil representar essas unidades em desenhos, por serem tão pequenas. As unidades são:

Miligrama (mg) = 0,001 g
Centigrama (cg) = 0,01 g
Decigrama (dg) = 0,1 g

A tonelada

Para medir massas muito grandes, é conveniente usar medidas maiores. Para isto foi criada a tonelada (t), que vale 1000 quilogramas.

Reunindo todas as medidas de massa

t	1000 ↔	**kg**	10 ↔	**hg**	10 ↔	**dag**	10 ↔	**g**	10 ↔	**dg**	10 ↔	**cg**	10 ↔	**mg**

O roteiro acima facilita a conversão entre as unidades de massa. Para passar de uma unidade para a unidade da direita, basta multiplicar pelo fator indicado. Por exemplo, para passar de grama para decigrama, basta multiplicar por 10. Para passar de uma unidade para a unidade à esquerda, basta dividir pelo fator indicado.

Exercícios

E1) Exprimir as seguintes medidas em gramas

a) 1,2 kg
b) 2 t
c) 0,5 kg
d) 2 hg
e) 3,5 dag
f) 0,15 kg
g) 7,5 hg
h) 20 dag
i) 20 cg
j) 100 mg

E2) Exprimir as seguintes medidas em quilogramas

a) 100 g
b) 35 dag
c) 2000 cg
d) 0,26 t
e) 50 mg
f) 270 dg
g) 105 hg
h) 3,8 dg
i) 1,7 t
j) 4,2 hg

Medidas de tempo

As medidas de tempo não usam o sistema decimal. Devido a motivos históricos, o dia foi dividido em 24 horas. Cada hora foi dividida em 60 minutos, e cada minuto foi dividido em segundos. A unidade básica de tempo é o segundo. Seus múltiplos não são baseados em potências de 10, como ocorre com o grama, o metro e outras unidades.

Unidade padrão de tempo: segundo (símbolo s)
Múltiplos do segundo:
1 minuto (min) = 60 segundos
1 hora (h) = 60 minutos = 3.600 segundos
1 dia = 24 horas = 1.440 minutos = 86.400 segundos

Muitas vezes um período de tempo pode ser definido em horas, minutos e segundos.

Exemplos:
Duas horas e meia
Três horas e vinte minutos
Duas horas, quinze minutos e dez segundos

A notação para medidas de tempo nesse formato é **xx h yy min zz s.** Também é comum chamar isso de formato HH:MM:SS

Exemplo:
2 h 35 min 27 s
2:35:27

Existem ainda a semana, o mês e o ano, que são unidades de tempo derivadas do dia. Entretanto, essas unidades não são usadas em cálculos científicos, devido à variabilidade do mês (28, 29, 30 ou 31 dias) e do ano (365 ou 366 dias). Para períodos de tempo maior é comum usar o dia, mesmo que o período seja equivalente a vários meses.

Somando medidas de tempo

Frequentemente medidas de tempo são apresentadas em horas, minutos e segundos. É preciso fazer conversões entre essas medidas, e também somá-las e subtraí-las.

Convertendo para segundos:
Para converter uma medida de tempo da forma HH:MM:SS para segundos, basta multiplicar o número de horas por 3600, multiplicar o número de minutos por 60 e somar os valores obtidos com o número de segundos.

Exemplo:
Converter 2 h 23 min 47 s para segundos.
2x3600 = 7200
23x60 = 1380

Somamos agora 7200 + 1380 + 47, que resulta em 8627 segundos.

Convertendo para o formato HH:MM:SS
Para converter uma medida de tempo dada em segundos, para o formato HH:MM:SS, basta fazer o seguinte:

1) Divida o valor por 60. O resto será o número de segundos. O quociente vai para a etapa 2
2) Divida o quociente por 60. O resto é o número de minutos. O quociente é o número de horas.

Exemplo:
Converter 4278 segundos para o formato HH:MM:SS
4278:60 = 71, resto 18
71:60 = 1, resto 11

Resposta: 1:11:18

Somando tempos no formato HH:MM:SS
Armamos a soma das duas medidas, colocando hora sobre hora, minuto sobre minuto e segundo sobre segundo. Somamos os segundos. Se o valor ultrapassar de 60, subtraímos 60 e adicionamos um “vai 1” para os minutos. Somamos os minutos, e se o valor ultrapassar 60, subtraímos 60 e aplicamos um “vai 1” para as horas. Se nos minutos ou nos segundos o valor ultrapassar 120, subtraímos 120 e aplicamos um “vai 2”, e assim por diante.

Dividindo tempo no formato HH:MM:SS por um número inteiro

Digamos que o problema seja converter 9 minutos por 5. Dividimos normalmente a parte inteira e obtemos o quociente, que será o número de minutos. O resto deve ser multiplicado por 60, passando a representar o número de segundos.

9 min / 5 = 1 minuto, resto 4 minutos
4 minutos = 4x60 segundos = 240 segundos
240 segundos / 5 = 48 segundos.
Resultado: 1 min 48 s

Exercícios

E5) Converter em segundos:

a) 10 horas
b) 56 minutos
c) 3 horas e meia
d) 2 h 30 min 20 s
e) 5:15:20
f) 10 minutos
g) 21:12:00
h) meia hora
i) 10:50:20
j) 1 dia

E6) Operar as seguintes medidas de tempo:
a) 3:20:40 + 10 h 45 min 50 s
b) 1:30:00 + 3:20 + 4:50:40
c) 3 x (1:40:50)
d) 2:35:10 – 1:40:40
e) 3:40:30 + 2:15:30 + 12:40:20

Medidas de capacidade

A medida de capacidade mais conhecida popularmente é o litro. Este tipo de medida é muito usado para medir quantidades de líquidos, mas também podem medir quantidades de sólidos e gases. Uma lata com capacidade para 10 litros de água, também pode armazenar 10 litros de óleo, 10 litros areia, 10 litros de ferro derretido, 10 litros de ar, ou seja, até quando a lata está vazia, sua capacidade continua sendo 10 litros (é claro que se forem armazenados 10 litros de ferro derretido, a lata irá derreter).

O litro é o volume ocupado por um cubo com 10 centímetros de lado. Quando está cheio de água destilada, à temperatura de 4 graus centígrados, o peso deste litro de água é exatamente igual a 1 kg. Ou seja, 1 kg é aproximadamente igual ao peso de 1 litro d'água.

O símbolo do litro é a letra l minúscula ou maiúscula. Usaremos neste livro "L" pois o l minúsculo é muito parecido com o número 1.

As unidades múltiplas do litro são:

Decalitro (dal) = 10 litros
Hectolitro (hl) = 100 litros
Quilolitro (kl) = 1000 litros

Existem ainda os submúltiplos do litro:

Mililitro (ml) = 0,001 L
Centilitro (cl) = 0,01 L
Decilitro (dl) = 0,1 L

O quilolitro também é chamado de *metro cúbico* (m^3), pois seu volume é o mesmo de um cubo com 1 metro de lado. O mililitro também é chamado de *centímetro cúbico* (cm^3 ou cc), pois seu volume é igual ao de um cubo com 1 centímetro de lado.

kl= m^3	10 ↔	**hl**	10 ↔	**dal**	10 ↔	**L**	10 ↔	**dl**	10 ↔	**cl**	10 ↔	**ml**

Exercícios

E7) Converter as seguintes medidas para litros.

a) 100 ml
b) 2,5 dal
c) 3 hl
d) 2 m^3
e) 1500 ml
f) 300 dl
g) 24 hl
h) 5 kl
i) 200 cc
j) 0,35 m^3

E8) Converter as seguintes medidas para metros cúbicos
a) 75 L
b) 100 L
c) 1500 L
d) 500 L
e) 10.000 L

Sistema monetário

O sistema monetário é relativamente simples em comparação com medidas da física. São usadas duas medidas para dinheiro:

1) A moeda oficial, que vale 1. Atualmente no Brasil esta moeda é o real.
2) O centavo, que vale 1/100 do valor da moeda oficial.

Escrevemos 1 real como R$ 1,00
Escrevemos 1 centavo como R$ 0,01

Exemplos:
R$ 1,50 = um real e cinquenta centavos
R$ 3,05 = três reais e cinco centavos

OBS: Sempre escrevemos a parte fracionária com duas casas decimais.

Exercícios

E9) Calcular os seguintes valores
a) R$ 10,25 + R$ 11,80
b) (R$ 1,35) x 5 + R$ 10,50
c) 2x(R$ 1,80) + 3x(R$ 1,60) + 4x(R$ 3,20)
d) R$ 10,00 – R$ 1,80 – R$ 3,80
e) R$ 1000,00 – 15% de R$ 100,00 – 3 x R$ 250,00
f) R$ 11,20 + R$ 3,20 + R$ 21,80 + R$ 30,15
g) 30 moedas de R$ 0,25 + 25 moedas de R$ 0,10 + 40 moedas de R$ 0,05
h) R$ 30,00 + R$ 11,50 – R$ 20,45
i) 100 x R$ 1,50 + 20 x R$ 2,20 + 30 x R$ 2,50
j) 50 x R$ 3,80 – 20 x R$ 4,80

Exercícios

E10) Converter as seguintes medidas para dg e dag

a) 1,2 kg
b) 100 g
c) 2 hg
d) 200 dg
e) 3000 mg
f) 200 cg

E11) Converter as seguintes medidas para cg e hg
a) 1 cg
b) 1 hg
c) 200 g
d) 0,4 kg
e) 5000 mg
f) 300 g

E12) Converter as seguintes medidas para kg
a) 2000 g
b) 300 g
c) 0,26 t
d) 250 dag
e) 2500 cg
f) 6000 dg

E13) Converter para segundos
a) 25 min
b) 1 h 20 min
c) 2 dias
d) 3 horas

E14) Converter para o formato HH:MM:SS
a) 300 min
b) 10000 s
c) 550 min
d) 330 s

E15) Efetue as seguintes operações de tempo
a) 3:20:40 + 1:50:50
b) 2:10:30 + 3:44:56 + 1:50:50
c) 2:30:00 – 1:53:20
d) 1:00:00 – 0:32:20

E16) Converter as seguintes medidas de capacidade para mililitros
a) 2,5 L
b) 250 dl
c) 26 cl
d) 1,2 dal
e) 2 hl
f) 3 kl

E17) Converter as seguintes medidas para litros
a) 3,6 hl
b) 2 m^3
c) 3,5 dal

d) 180 cl
e) 220 dl
f) 1350 ml

E18) Calcule quanto valem os seguintes conjuntos de moedas:
a) 20 x R$ 0,50 + 20 x R$ 0,25 + 20 x R$ 0,10
b) 20 x R$ 0,10 + 30 x R$ 0,05 + 20 x R$ 0,01

E19) Calcule os seguintes valores:
a) R$ 11,80 + R$ 12,30
b) R$ 100,00 – R$ 53,20
c) R$ 50,00 – 3 x R$ 11,30
d) R$ 20,00 – R$ 7,60 – 3 x R$ 3,20
e) R$ 5,60 + 2 x R$ 2,20 + 3 x R$ 0,50 + 4 x R$ 1,80

Questões resolvidas

Q1) (CM) Obtém-se o latão fundindo-se 6 partes de cobre com 4 partes de zinco. Para produzir 150 kg de latão, a diferença entre as quantidades necessárias de cobre e zinco, em kg, será igual a:

(A) 60 (B) 50 (C) 45 (D) 40 (E) 30

Solução:
O problema dá que a cada 10 partes, 6 devem ser de cobre e 4 devem ser de zinco, ou seja, o cobre ocupa 60% do peso e o zinco ocupa 40%. Em 150 kg, o cobre ocupa 60% de 150 kg = 90 kg, e o zinco ocupa o resto, 60 kg. A diferença entre os dois é de 30 kg.

Resposta: (E)

Q3) (CM) Joana comprou sete pacotes de macarrão de 650 g cada. Se já consumiu 2,3 Kg desse total, a quantidade de kg restante é

(A) 2 1/6 kg (B) 2 1/3 kg (C) 2 1/5 kg (D) 2 1/4 kg (E) 2 1/10 kg

Solução:
7x0,65 = 4,55 kg
Restam 4,55 kg – 2,3 kg = 2,25 kg = 2 1/4 kg

Resposta: (D)

Q6) (CM) Um caminhão vai ser carregado com 109 sacos de batata com 45 kg cada um. Se o peso do caminhão é 3 t, qual será o peso do caminhão com a carga?

(A) 79,05 t (B) 790,5 kg (C) 7,905 kg (D) 7,905 t (E) 79,05 kg

Solução:
109 x 45 + 3000 = 7905 kg ou 7,905 t

Resposta: (D)

Q7) (CM) Um tubo contendo 20 comprimidos pesa 50 gramas. Quando contém 8 comprimidos, pesa 38 gramas. Qual o peso do tubo e de um comprimido:

(A) 30 g; 1 g
(B) 20 g; 1 g
(C) 50 g; 0,5 g
(D) 10 g; 5 g
(E) 30 g; 2,5 g

Solução:
Tubo + 20 comprimidos = 50 g
Tubo + 8 comprimidos = 38 g

O peso a menos, de 12 gramas, é devido aos 12 comprimidos a menos. Então cada comprimido pesa 1 g. O tubo pesa 30 g.

Resposta: (A)

Q9) (CM) Considerando que um litro de petróleo pesa 0,8 kg e um tanque cúbico de 80 cm de aresta está com 3/4 de sua capacidade com petróleo, o peso do petróleo do tanque é:

(A) 307,2 kg (B) 310,8 kg (C) 384,0 kg (D) 448,0 kg (E) 512,0 kg

Solução:
Usaremos volume em litros e massa em kg.
Volume de petróleo no tanque:
8 dm x 8 dm x 8 dm x 3/4 = 384 dm^3 = 384 litros
Massa = 384 x 0,8 = 397,2 kg

Resposta: (A)

Q14) (CM) Dois sinais de trânsito, um na rua Augusta e outro na rua Amélia, ficaram verdes exatamente em um determinado instante. O primeiro leva 1 minuto e 40 segundos para ficar verde novamente e o segundo sinal leva 2 minutos e 20 segundos. A partir de quanto tempo depois os dois sinais voltaram a ficar verdes em um mesmo instante?

(A) 8 minutos e 40 segundos.
(B) 10 minutos e 20 segundos.
(C) 11 minutos e 40 segundos.
(D) 12 minutos e 20 segundos.
(E) 13 minutos e 40 segundos.

Solução:
Ciclo do primeiro sinal: 1 min 40 s = 100 s
Ciclo do segundo sinal: 2 min 20 s = 140 s
MMC(100, 140) = 700 s = 11 min 40 s

Resposta: (C)

Q16) (CM) Bruno perguntou ao pai quanto tempo faltava para irem ao parque. O pai respondeu que faltava, em segundos, a maior soma possível quando adicionamos um número natural de três algarismos a um número natural de dois algarismos, sendo todos os cinco algarismos distintos. O tempo que faltava para Bruno e seu pai irem ao parque era de

(A) 17 minutos e 32 segundos
(B) 17 minutos e 41 segundos
(C) 17 minutos e 52 segundos
(D) 18 minutos e 08 segundos
(E) 18 minutos e 18 segundos

Solução:
987 + 65 = 1052 s = 17 min 32 s

Resposta: (A)

Q28) (CM) Vinte pacotes de papel são empilhados um sobre os outros. Cada pacote tem 500 folhas e cada folha tem 0,15mm de espessura. O papel utilizado para a embalagem de cada pacote tem 0,5mm de espessura. Desta forma, a medida da altura da pilha desses vinte pacotes é

(A) 1m (B) 1,15m (C) 1,51m (D) 1,52m (E) 2,35m

Solução:
(500 x 0,15 + 0,5 x 2) x 20 = 1,52 m

Resposta: (D)

Questões propostas

Q35) (CM) Luíza foi a uma sorveteria onde o sorvete era vendido a peso. Pegou uma porção e verificou que seu peso era tal que lhe faltavam exatamente 140 gramas para completar meio quilograma. O quilograma (kg) do sorvete estava sendo vendido a R$ 12,50. O preço da porção pesada por Luíza foi:

(A) R$ 1,75 (B) R$ 4,50 (C) R$ 5,25 (D) R$ 3,50 (E) R$ 3,75

Q41) (CM) Na embalagem de uma lâmpada, está escrito que a sua durabilidade média é de 2016 horas. Se essa lâmpada ficar acesa ininterruptamente e durar exatamente 2016 horas, considerando que um mês possui 30 dias, ela terá ficado acesa por

(A) 2 meses, 28 dias e 2 horas.
(B) 2 meses, 23 dias e 12 horas.
(C) 2 meses, 23 dias e 24 horas.
(D) 85 dias.
(E) 3 meses.

Q43) (CM) Kacilda pensa que seu relógio está 5 minutos atrasado. Este, porém, está 15 minutos adiantado. Kacilda comparece ao trabalho julgando estar 10 minutos atrasada. Na realidade, Kacilda chegou

(A) 10 minutos adiantada.
(B) na hora certa.
(C) 10 minutos atrasada.
(D) 20 minutos adiantada.
(E) 15 minutos atrasada.

Q45) (CM) Na última eleição, três partidos políticos: A, B e C tiveram direito, por dia, respectivamente, a 120 segundos, 144 segundos e 168 segundos de tempo gratuito de propaganda na televisão, com diferentes números de aparições. O tempo de cada aparição, para todos os partidos, foi sempre o mesmo e o maior possível. A soma do número de aparições diárias dos partidos na TV foi :

(A) 15 (B) 16 (C) 18 (D) 19 (E) 20

Q53) (CM) O volume interno do tanque de gasolina de um jipe do Exército é de 0,06 m^3. O número de litros que falta para encher o tanque, se o mesmo está preenchido com 3/4 de sua capacidade total, é de:

(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 17 (E) 18

Q57) (CM) Milena tem 12.000 ml de suco para colocar em garrafas de 1/2 litro. Se ela possui 40 garrafas, a quantidade de garrafas que não serão utilizadas é:

(A) 20 (B) 16 (C) 26 (D) 34 (E) 24

Q59) (CM) Uma distribuidora de bebidas vendeu 15 caixas de suco de uva em garrafas de 1,5 dm^3. Se cada caixa contém 20 garrafas de suco, a quantidade de litros de suco vendida foi de:

(A) 300 (B) 450 (C) 4500 (D) 3000 (E) 150

Q61) (CM) O número de troncos de árvores (de 3 m^3 de volume cada) que foram necessários derrubar para fazer os palitos de fósforos (de 200 mm^3 de volume cada), que estão em 1200 containeres, cada um com 12000 pacotes de 10 caixas com 40 palitos cada é:

(A) 1152 (B) 876 (C) 576 (D) 384 (E) 288

Respostas dos exercícios

E1) a) 1200 g b) 2.000.000 g c) 500 g d) 200 g e) 35 g
f) 150 g g) 750 g h) 20 g i) 0,02 g j) 0,1 g
E2) a) 0,1 kg b) 0,035 kg c) 0,02 kg d) 260 kg e) 0,00005 kg
f) 0,027 kg g) 10,5 kg h) 0,00038 kg i) 1700 kg j) 0,42 kg
E5) a) 36.000 s b) 3.360 s c) 12.600 s d) 9.020 s e) 18.920
f) 600 s g) 76.320 s h) 1.800 s i) 39.020 s j) 86.400 s
E6) a) 14:06:30 b) 06:24:00 c) 5:02:30 d) 0:54:30 e) 16:36:20
E7) a) 0,1 L b) 25 L c) 300 L d) 2.000 L e) 1,5 L
f) 30 L g) 2400 L h) 5.000 L i) 0,2 L j) 350 L
E8) a) 0,075 m^3 b) 0,1 m^3 c) 1,5 m^3 d) 0,5 m^3 e) 10 m^3
E9) a) R$ 22,05 b) R$ 17,25 c) R$ 21,20 d) R$ 4,40 e) R$ 235,00
f) R$ 66,35 g) R$ 12,00 h) R$ 21,05 i) R$ 269,00 j) R$ 94,00
E10) a) 12000 dg, 120 dag b) 1000 dg, 10 dag c) 2000 dg, 20 dag
d) 200 dg, 2 dag e) 30 dg, 0,3 dag f) 20 dg, 0,2 dag
E11) a) 1 cg, 0,0001 hg b) 10000 cg, 1 hg c) 20000 cg, 2 hg
d) 40000 cg, 4 hg e) 500 cg, 0,05 hg f) 30000 cg, 3 hg
E12) a) 2 kg b) 0,3 kg c) 260 kg d) 2,5 kg e) 0,025 kg f) 0,6 kg
E13) a) 1.500 s b) 4.800 s c) 172.800 s d) 10.800 s
E14) a) 00:05:00 b) 2:46:40 c) 9:10:00 d) 0:05:30
E15) a) 5:11:30 b) 7:46:16 c) 0:36:40 d) 0:27:40
E16) a) 2.500 ml b) 2.500 ml c) 260 ml d) 12.000 ml e) 200.000 ml f) 3.000.000 ml

E17) a) 360 L b) 2000 L c) 35 L d) 1,8 L e) 22 L f) 1,35 L
E18) a) R$ 17,00 b) R$ 3,70
E19) a) R$ 24,10 b) R$ 46,80 c) R$ 66,10 d) R$ 2,80 e) R$ 18,70
E29) 50 horas
E30) 2 h 24 min

Respostas das questões propostas

Q35) Resposta: (B)
Q41) Resposta: (C)
Q43) Resposta: (B)
Q45) Resposta: (C)
Q53) Resposta: (C)
Q57) Resposta: (B)
Q59) Resposta: (B)
Q61) Resposta: (D)
Q64) Resposta: (B)
Q65) Resposta: (B)

■

Obtenha a versão mais recente em www.laercio.com.br

Capítulo 12

Medidas geométricas

Elementos de geometria plana

As questões de geometria mais comuns são as que pedem áreas, volumes e perímetros de figuras geométricas. As figuras geométricas podem ser especiais ou planas. O perímetro de um polígono é a soma das medidas dos seus lados. Polígono é uma sequência de segmentos de reta, segmento de reta é a parte de uma reta compreendida entre dois pontos. Mas o que é uma reta e o que é um plano?

Ponto, reta, plano

A figura 1 mostra os pontos A, B e C. Usamos letras maiúsculas para representar os pontos. Já as retas são representadas por letras minúsculas. Quando três pontos podem ser colocados sobre uma mesma reta, dizemos que os pontos são *colineares*. Na figura 1, os pontos M, N e P são colineares. Já os pontos A, B e C são ditos *não colineares*.

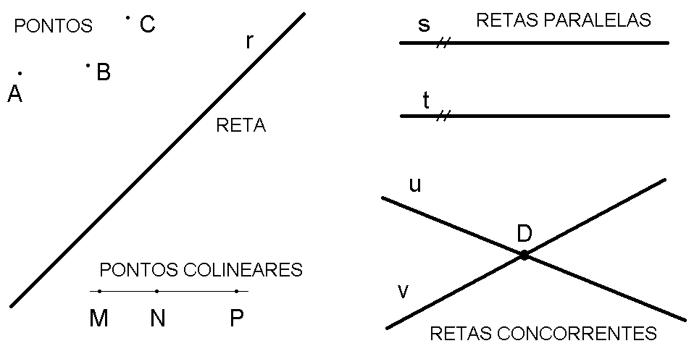


Figura 1

Elementos primitivos da geometria plana.

Duas retas localizadas em um plano podem ser *paralelas* ou *concorrentes*. Retas paralelas nunca se encontram, ou seja, não existe um ponto comum entre as duas (exceto se forem retas coincidentes, ou seja, uma sobre a outra, quando todos os pontos de uma reta pertencem também à outra reta). Quando duas retas são tais que existe um único ponto que pertence às duas, como o ponto D da figura 1, dizemos que essas retas são *concorrentes*. O ponto de encontro das duas retas é chamado *ponto de interseção*. Aqui podemos usar um pouco de teoria dos conjuntos para caracterizar essas retas.

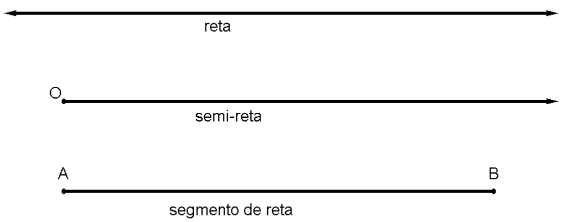


Figura 2

Reta, semi-reta, segmento de reta.

Ângulos

Ângulo é uma das quatro partes nas quais um plano fica dividido quando é cortado por duas retas concorrentes (figura 3). Chamamos de *lados* do ângulo, as duas semi-retas que partem do ponto de interseção e delimitam a fronteira do ângulo. Este ponto origem dos lados é chamado *vértice* do ângulo.

Quando um ângulo é reto, as duas retas que dividem o plano são ditas *perpendiculares*.

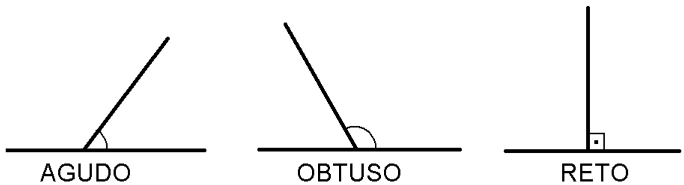


Figura 4

Classificação de ângulos de acordo com a medida.

Posições relativas de retas

Já vimos que duas retas podem ser paralelas ou concorrentes (figura 6). Quando retas concorrentes formam ângulos retos, dizemos que são retas *perpendiculares*.

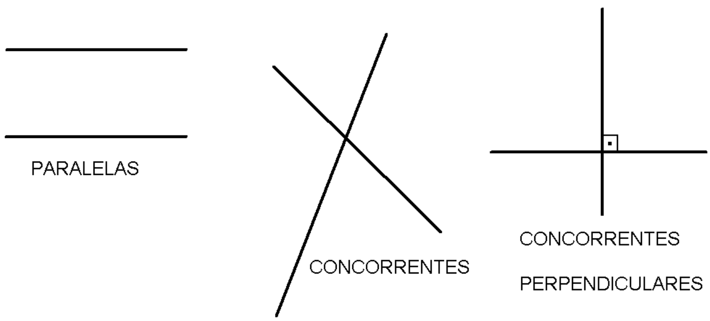


Figura 6

Posições relativas de duas retas no plano.

Polígono

No estudo da geometria existem vários conceitos que precisam ser apresentados. É muito importante o estudo dos triângulos e quadriláteros, mas primeiro precisamos apresentar o conceito de *polígono*. Acompanhe pela figura 6:

Linha poligonal: é uma sequência de segmentos de reta, AB, BC, CD, DE, EF..., de tal forma que a segunda extremidade de cada um é a primeira extremidade do segmento seguinte.

Polígono: é uma *linha poligonal fechada* ou seja, o final do último segmento é o inicio do primeiro segmento.

Polígono convexo: é um polígono tal que, qualquer reta que o corte, sempre determinará um único segmento.

Polígono não convexo: é um polígono tal que seja possível cortá-lo por uma reta determinando mais de um segmento.

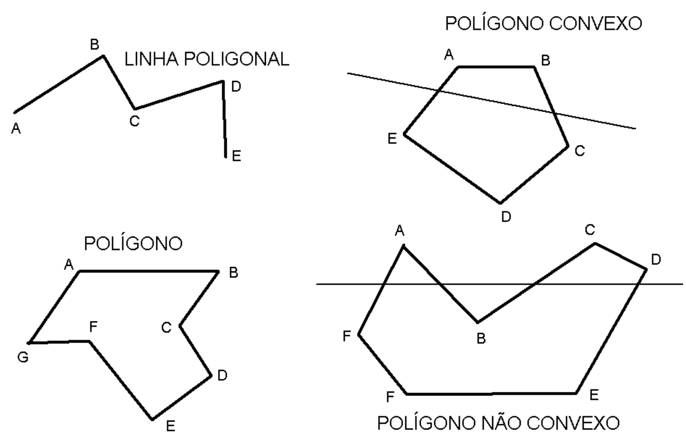


Figura 7

Linha poligonal e polígonos.

Os polígonos são classificados de acordo com o número de lados (figura 7):

3 lados: triângulo
4 lados: quadrilátero
5 lados: pentágono
6 lados: hexágono
7 lados: heptágono
8 lados: octógono
9 lados: eneágono
10 lados: decágono

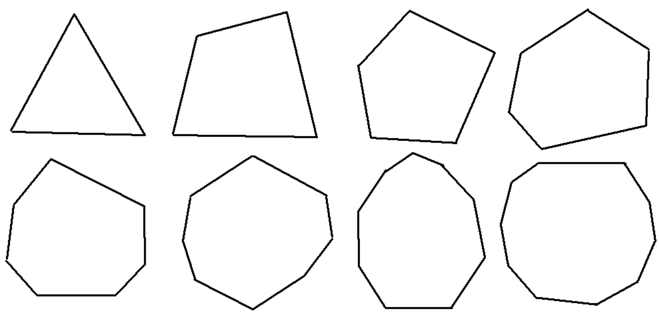


Figura 8

Polígonos de 3 a 10 lados.

Triângulos

Um triângulo é um polígono de 3 lados. É sempre convexo e não tem diagonais. Pode ser classificado de várias formas, dependendo dos seus lados (figura 11).

Triângulo equilátero: tem 3 lados iguais. Seus ângulos também são iguais

Triângulos isósceles: tem 2 lados iguais. Dois dos seus ângulos também são iguais.

Triângulo retângulo: tem um ângulo reto, ou seja, dois dos seus lados são perpendiculares.

Triângulo escaleno: possui necessariamente os três lados diferentes, e em consequência, os três ângulos também são diferentes.

Triângulo acutângulo: seus três ângulos são agudos.

Triângulo obtusângulo: possui um ângulo obtuso, ou seja, maior que o ângulo reto.

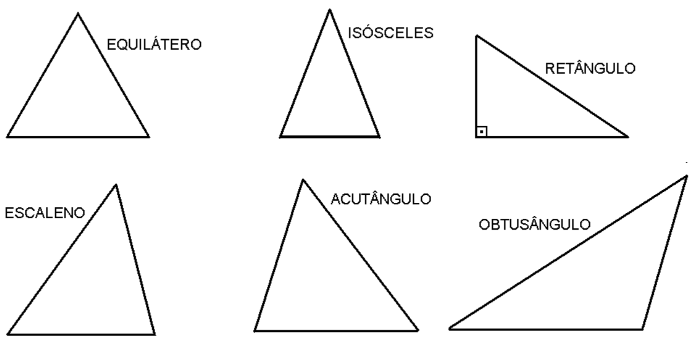


Figura 11

Tipos de triângulos.

Note que um triângulo equilátero também é isósceles. Um triângulo retângulo pode ser isósceles, nesse caso é chamado triângulo retângulo isósceles. Para obter um triângulo desse tipo, basta dividir um quadrado ao meio, através de uma diagonal.

Quadriláteros

Quadriláteros são polígonos de 4 lados. Possuem duas diagonais. Recebem várias classificações, de acordo com seus lados e ângulos (figura 12).

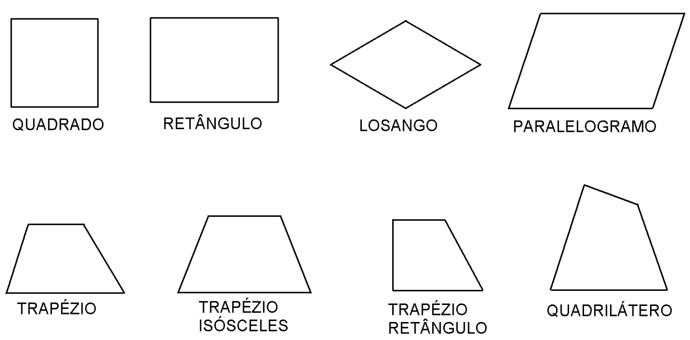


Figura 12

Tipos de quadriláteros.

Trapézio: tem dois lados paralelos. Um trapézio pode ser qualquer, isósceles ou retângulo.

Paralelogramo: é todo quadrilátero que tem lados opostos paralelos.

Losango: é um paralelogramo que tem os quatro lados iguais. Seus ângulos opostos também são iguais, dois a dois.

Retângulo: é um paralelogramo que tem os quatro ângulos iguais (ângulos retos). Seus lados adjacentes são perpendiculares.

Quadrado: é ao mesmo tempo um losango e um retângulo. Seus quatro lados são iguais, e seus quatro ângulos também são iguais (retos).

Perímetro

O perímetro de uma figura plana é a soma das medidas dos seus lados. No caso de polígonos, basta somar as medidas. Na figura 14, o perímetro do triângulo é 10+11+12 = 33, e o perímetro do retângulo é 8+12+8+20 = 40.

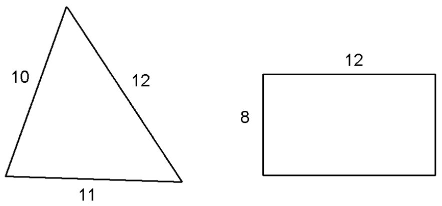


Figura 14

Perímetros do triângulo e do retângulo.

Os perímetros dos triângulos da figura 16 são:

6+6+6 = 18 (triângulo equilátero)
6+6+4 = 16
3+4+5 = 12
5+6+7 = 18
6+7+6,5 = 19,5
6+7+9 = 22

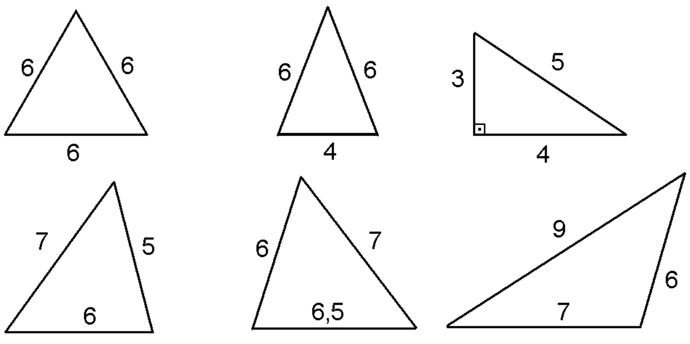


Figura 15

Perímetros de triângulos.

Exercícios

E1) Calcule os perímetros dos seguintes polígonos:
a) Quadrado de lado 12
b) Retângulo com lados 3 e 4
c) Losango com lado 10
d) Triângulo com lados 5, 6 e 8
e) Paralelogramo com lados 5 e 7

Área

Área é a medida da região interior a um polígono. As áreas mais importantes, e mais comuns nas provas são as do quadrado e do retângulo. Para saber a área do quadrado, basta multiplicar dois de seus lados. Para calcular a área do retângulo, multiplicamos dois de seus lados diferentes:

Área do quadrado: a x a
Área do retângulo: a x b

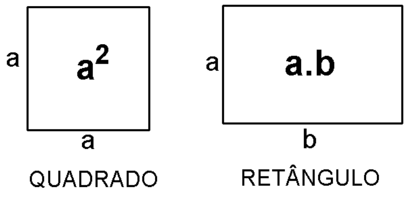


Figura 17

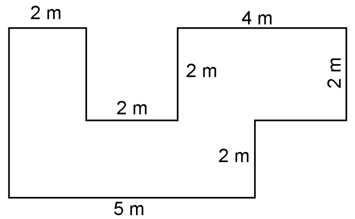
Áreas do quadrado e do retângulo.

Exemplo:
Calcule a área de um quadrado de lado 6 m e de um retângulo de lados 5 m e 8 m

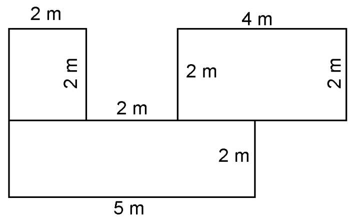
Quadrado: A = 6x6 = 36; Retângulo: A=5x8 = 40

Resposta: O quadrado tem 36 m^2 e o retângulo tem 40 m^2

Exemplo:
Calcule a área da figura abaixo



Solução:
É fácil perceber que a figura é composta de um quadrado mais dois retângulos. Basta então somar as áreas.



$2x2 + 4x2 + 5x2 = 22\ m^2$

Nem sempre a divisão em retângulos é tão fácil assim. Vejamos um outro exemplo que não pode ser feito por este processo:

Exercícios

E3) Calcule a área de um terreno retangular com 20 metros de largura e 40 metros de profundidade.

E4) Calcule a área de um triângulo retângulo no qual os dois lados menores valem 4 cm e 8 cm.

E5) Calcule a área de um triângulo com base 5 cm e altura 4 cm.

E7) Calcule a área de um losango cujas diagonais medem 6 cm e 10 cm

Elementos de geometria espacial

A geometria espacial é um assunto bem mais complexo, estudado no ensino médio. Por hora, é importante saber calcular o volume de sólidos como o cubo e o paralelepípedo retângulo.

Sólidos geométricos

Existem inúmeros sólidos geométricos estudados na geometria espacial. A figura 27 mostra alguns brinquedos com formatos desses sólidos:

- Cubo
- Paralelepípedo retângulo
- Pirâmide
- Prisma
- Cilindro
- Cone
- Esfera

Figura 27

Sólidos geométricos.

A figura 28 mostra um sólido bastante conhecido: a pirâmide de base triangular. Possui 4 vértices, 4 faces e 6 arestas.

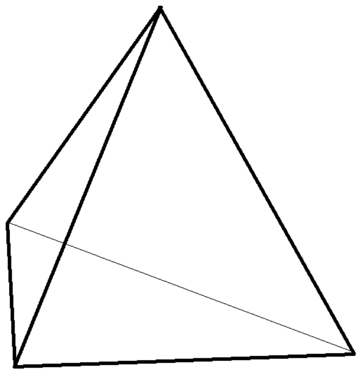


Figura 28

Pirâmide de base triangular.

Vértices são os pontos de onde partem os segmentos de reta que, unidos, formarão o sólido. As faces são polígonos que têm seus lados unidos dois a dois. A junção de duas faces é chamada aresta do sólido.

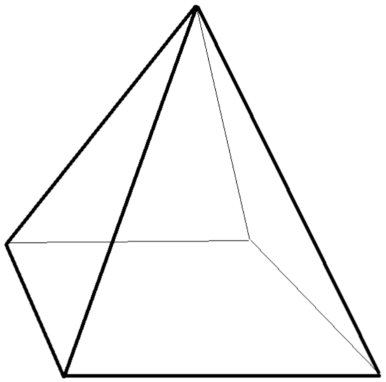


Figura 29

Pirâmide de base quadrada.

O cubo é um sólido geométrico dos mais importantes. Possui 8 vértices, 6 faces e 12 arestas. Suas arestas são perpendiculares entre si, e todas as suas faces são quadrados de lados iguais.

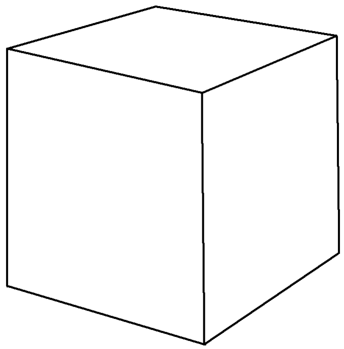


Figura 30

Cubo.

O paralelepípedo retângulo (figura 31) também aparece com frequência na vida cotidiana. É o "formato da caixa". A maioria das construções possuem este formato. Seus lados são retângulos.

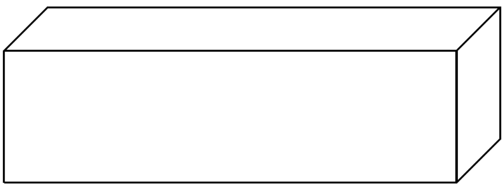


Figura 31

Paralelepípedo retângulo.

Um paralelepípedo retângulo 12 arestas com possui três medidas iguais, quatro a quatro. Significa que quatro arestas paralelas têm medidas iguais, outras quatro têm medidas iguais entre si, e as outras quatro têm medidas iguais entre si. Essas medidas podem ser chamadas de comprimento, altura, largura, profundidade, etc. Para a geometria, não é importante o nome que é dado a cada uma das medidas.

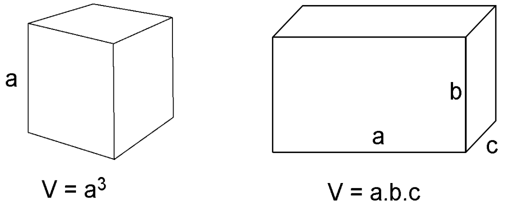


Figura 31

Volume do cubo
Volume do paralelepípedo retângulo.

Para calcular o volume do cubo, basta multiplicar sua aresta 3 vezes (a.a.a), ou seja a^3 (por isso é chamado de *a elevado ao cubo*.

Exercícios

E8) Calcule o volume de um cubo de aresta 10 cm

E9) Calcule a soma das áreas das faces de um cubo de aresta 4 cm

E10) Calcule o volume de um paralelepípedo retângulo de arestas 3, 5 e 8 cm

Medidas de comprimento

O metro é a medida básica de comprimento, e também é usado para medir áreas e volumes (m^2 e m^3 – metro quadrado e metro cúbico).

Para medir distâncias menores, foram criados submúltiplos do metro:

Decímetro: 1/10 do metro : 1 dm = 0,1 m
Centímetro: 1/100 do metro : 1 cm = 0,01 m
Milímetro: 1/1000 do metro : 1 mm = 0,001 m

Em consequência, temos:
1 dm = 10 cm
1 cm = 10 mm
1 dm = 100 mm
1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm

Entre essas três unidades, são mais usadas o centímetro e o milímetro.

Existem ainda os múltiplos do metro, para medir distâncias maiores:

Decâmetro = 10 metros : 1 dam = 10 m
Hectômetro = 100 metros : 1 hm = 100 m
Quilômetro = 1000 metros : 1 km = 1000 m

Em consequência, temos:
1 hm = 10 dam
1 km = 10 hm = 100 dam = 1000 m

Entre essas unidades, o quilômetro é a mais usada. Raramente usamos hm e dam na vida cotidiana (exceto em questões de provas).

Enquanto você ainda está aprendendo, use o diagrama abaixo para conversão das unidades de comprimento. As unidades maiores estão à esquerda, as menores estão à direita. Por exemplo, para passar de metros para milímetros é preciso multiplicar por 10 três vezes. 5,2 metros resultarão em 5200 milímetros. Basta andar com a vírgula para a direita três casas.

km	10 ↔	**hm**	10 ↔	**dam**	10 ↔	**m**	10 ↔	**dm**	10 ↔	**cm**	10 ↔	**mm**

Exercícios

E11) Converter para metros
a) 2,3 km
b) 6 hm
c) 25 dam
d) 35 dm
e) 120 cm
f) 1500 mm

E12) Converter para km
a) 32.000 m
b) 400 m

c) 40.000 cm
d) 5 hm

Medidas de área

Todas as medidas de comprimento, quando são elevadas ao quadrado, tornam-se medidas de área. Exemplos:

1 mm^2 = área de um quadrado com 1 mm de lado
1 cm^2 = área de um quadrado com 1 cm de lado
1 dm^2 = área de um quadrado com 1 dm de lado
1 m^2 = área de um quadrado com 1 m de lado
1 dam^2 = área de um quadrado com 1 dam de lado
1 hm^2 = área de um quadrado com 1 hm de lado
1 km^2 = área de um quadrado com 1 km de lado

Lembra-se que ensinamos que quando dobramos o lado de um quadrado, sua área fica 4 vezes maior? Pois bem quando multiplicamos o lado de um quadrado por 10, sua área fica 100 vezes maior. E quando multiplicamos o lado de um quadrado por 1000, sua área fica 1.000.000 de vezes maior. Então, temos.

1 km^2 = 1.000.000 m^2
1 m^2 = 1.000.000 mm^2

O quilômetro quadrado vale um milhão de metros quadrados, e não 1000, e o metro quadrado vale 1 milhão de mm^2, e não 1000.

Exemplo:
Um retângulo mede 0,3 m por 2 dm. Qual é a sua área em centímetros quadrados?

Solução:
O ideal é passar todas as medidas para centímetros, pois queremos a área no final em centímetros quadrados. Então as dimensões do retângulo são:
0,3 m = 30 cm
2 dm = 20 cm
Área = 30 cm x 20 cm = 600 cm^2

Exercícios

E13) Calcule as áreas dos seguintes retângulos em m^2:
a) 200 cm x 4 dm
b) 300 mm x 0,5 dam
c) 0,2 km x 30 dam
d) 0,1 hm x 2 dam
e) 20 cm x 30 cm

Medidas de volume

Da mesma forma como as unidades de comprimento podem ser elevadas ao quadrado para medir áreas, podem ser elevadas ao cubo para medir volumes. Temos então as unidades como metro cúbico, centímetro cúbico, etc.

1 mm^3 = volume de um cubo com 1 mm de lado
1 cm^3 = volume de um cubo com 1 cm de lado = 1 mililitro = 0,001 L
1 dm^3 = volume de um cubo com 1 dm de lado = 1 litro
1 m^3 = volume de um cubo com 1 m de lado = 1000 litros
1 dam^3 = volume de um cubo com 1 dam de lado
1 hm^3 = volume de um cubo com 1 hm de lado
1 km^3 = volume de um cubo com 1 km de lado

Apesar de existirem e serem usadas em alguns casos, as unidades dam^3, hm^3 e km^3 não pouco usadas na prática. O metro cúbico é a unidade mais usada para expressar grandes volumes.

É importante entender então a relação entre m^3, dm^3 e cm^3.

1 m = 10 dm ➔ 1 m^3 = 1000 dm^3 = 1000 L
1 dm = 10 cm ➔ 1 dm^3 = 1000 cm^3 = 1000 ml

A melhor forma de resolver problemas de volume na unidade certa é passar todas as medidas para a mesma unidade. Se é pedido o volume em litros, então passe todas as unidades de comprimento para dm. O resultado será dado em litros. Se for pedido o volume em metros cúbicos, passe todas as unidades para litros. O resultado será dado em metros cúbicos.

m^3	1000 ↔	**dm^3** (litro)	1000 ↔	**cm^3** (ml)

Exercícios

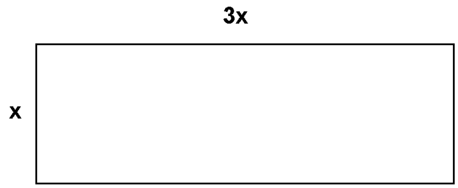
E14) Calcule os volumes dos seguintes paralelepípedos retângulos em m^3:
a) 40 cm x 5 dm x 0,3 m
b) 5 dam x 0,5 hm x 300 cm
c) 50 cm x 0,2 m x 4 dm
d) 3 dam x 0,4 hm x 5000 mm
e) 7 dm x 500 cm x 3 m

Questões resolvidas

Q2) (CM) A equipe ALFA de alunos do Colégio Signos, recebeu a tarefa de calcular a área do campo de futebol do colégio. Sabe-se que o comprimento é triplo de sua largura, e que para cercar este campo de formato retangular com 3 voltas de arame, foram gastos 720 m de arame. Daí, concluímos que o campo tem uma área de:

(A) 2.100 m^2 (B) 2.500 m^2 (C) 2.400 m^2 (D) 2.700 m^2 (E) 2.800 m^2

Solução:
Chamando o lado menor de x, o perímetro será 8x. Isto equivale a 240 metros, já que para cercar o campo com 3 voltas de arame são necessários 720 metros. Se 8x vale 240, x vale 30. Então as medidas são 30 m e 90 m. Logo, sua área vale 30 m x 90 m = 2.700 m^2.



Resposta: (D)

Q4) (CM) Calcule o valor de 548 mm + 12,6dm - 36cm.

(A) 1,448 m (B) 14,48 m (C) 63,8 m (D) 638 m (E) 524,6 m

Solução:
0,548 m + 1,26 m – 0,36 m = 1,448 m

Resposta: (A)

Q7) (CM) Em uma fábrica de cosméticos existe um tanque com o formato de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são 0,005 hm, 30 dm e 0,004 km. Neste tanque está armazenado o perfume Encantador, ocupando 6,5% da capacidade total do recipiente. Se 1 decalitro do perfume custa R$ 125,00 então a quantidade de perfume existente no tanque vale:

(A) R$ 4875,00 (B) R$ 48750,00 (C) R$ 6500,00 (D) R$ 12500,00 (E) R$ 6000,00

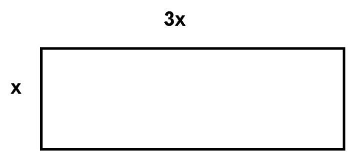
Solução:
Volume do tanque: 5 dm x 30 dm x 40 dm = 6000 dm^3 = 6000 L
6,5% da capacidade = 6000x0,065 = 390 L
Volume em decalitros: 390/10 = 39 dal
Valor: 39 x R$ 125,00 = R$ 4875,00

Resposta: (A)

Q15) (CM) Se o comprimento de um retângulo é o triplo de sua largura, então a relação entre o maior lado e o perímetro desse retângulo será representado pela fração:

(A) 3/8 (B) 1/2 (C) 1/3 (D) 1/8 (E) 1/5

Podemos representar o perímetro como mostra a figura abaixo.



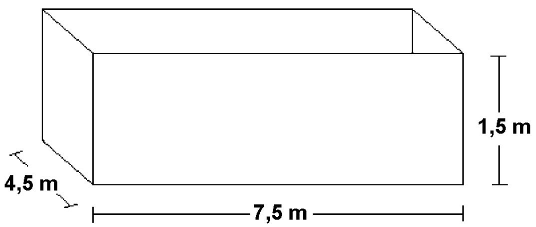
Maior lado = 3x.
Perímetro = 8x
Razão = 3/8

Resposta: (A)

Q16) (CM) Ana Luiza deseja revestir a piscina de sua casa com azulejos. Sabe-se que a piscina tem o formato de um paralelepípedo retângulo, de 7,5 m de comprimento, 4,5 m de largura e 1,5 m de profundidade. Os azulejos escolhidos são quadrados de 15 cm de lado. A quantidade de azulejos necessária para revestir toda a área interna da piscina será igual a:

(A) 2300 (B) 2600 (C) 2800 (D) 3100 (E) 4600

Solução:
Comprimento: 7,5 m = 750 cm = 50 azulejos
Largura: 4,5 m = 450 cm = 30 azulejos
Altura: 1,5 m = 150 cm = 10 azulejos
Podemos agora multiplicar os números de azulejos nas paredes laterais e no fundo.



Laterais maiores: 50 x 10 x 2 = 1000 (são duas paredes)
Laterais menores: 30 x 10 x 2 = 600 (são duas paredes)
Fundo: 30 x 50 = 1500
Total: 1000 + 600 + 1500 = 3100 azulejos

Resposta: (D)

Q18) (CM) Um quadrado e um retângulo têm áreas iguais. Sabe-se ainda que:
* O quadrado tem lado medindo 4 dm;
* O retângulo tem lados com medidas expressas por números naturais maiores que 1;
* Esse retângulo não é um quadrado.

Com base nessas informações, podemos afirmar que a soma das medidas de todos os lados do retângulo em questão, em dam, é:

(A) 0,002 (B) 0,02 (C) 0,2 (D) 2 (E) 20

Solução:
Quadrado: 16 dm^2
Retângulo: 16 dm^2 = 1x16, 2x8, 4x4 ➔ só pode ser 2x8, pois não é quadrado (4x4 não serve) e as medidas são números inteiros maiores que 1 (1x16 não serve). O retângulo mede então, 2 dm x 8 dm. Seu perímetro é 20 dm = 2 m = 0,2 dam

Resposta: (C)

Q19) (CM) No combate a um incêndio, foram utilizados 28 caminhões com capacidade de armazenar 3000 litros de água cada um. Se, para extinguir o mesmo incêndio, houvesse apenas caminhões com capacidade para 4 milhões de centímetros cúbicos de água cada, então teria a quantidade mínima de caminhões necessária para apagar o incêndio é igual a

(A) um número natural múltiplo de 7.

(B) o antecessor do número natural 18.
(C) um número par.
(D) o sucessor do número natural 22.
(E) o consecutivo do número natural 19.

Solução:
1 litro = 1000 cm^3, então 4.000.000 cm^3 é igual a 4.000 litros.
Para apagar o incêndio foram usados 28 caminhões com 3.000 litros = 84.000 litros.
Usando caminhões de 4.000 litros, serão necessários 84.000 / 4.000 = 21 caminhões.

Resposta: (A)

Q21) (CM) As medidas oficiais de uma quadra de basquete são 20 m por 12 m. O pátio de uma escola tem a forma retangular e suas dimensões são 0,48 hm por 3600 cm. Nesse pátio, foi construída uma quadra de basquete seguindo os padrões oficiais. Qual a área livre que restou nesse pátio?

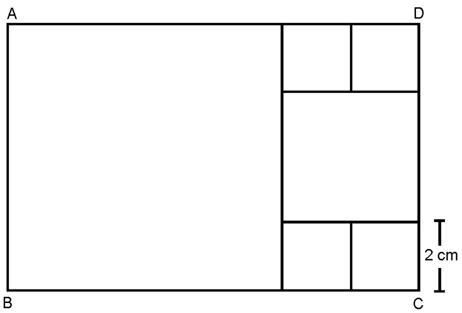
(A) 1488 m (B) 1488 m^2 (C) 1528 m^2 (D) 1528 m (E) 1400 m^2

Solução:
A área livre é a área do pátio menos a área da quadra. Usaremos todas as medidas em metros:
48 m x 36 m – 20 m x 12 m = 1728 m^2 – 240 m^2 = 1488 m^2.

Resposta: (B)

Questões propostas

Q84) (CM) O retângulo ABCD está decomposto em quadrados, sendo que o menor deles possui lado igual a 2 centímetros, conforme a figura abaixo:



Qual a fração que representa o quociente entre as dimensões dos lados AD e AB , respectivamente?

(A) 96/1 (B) 3/2 (C) 6/2 (D) 4/2 (E) 2/3

Q89) (CM) Alfredo possui um terreno do qual utilizou 5/9 da área para fazer um campo de futebol, 1/27 para construir uma churrasqueira e 5/108 para construir uma piscina, sobrando ainda 195 m^2 de área livre. A área utilizada para a churrasqueira foi de:

(A) 35 m^2 (B) 30 m^2 (C) 40 m^2 (D) 20 m^2 (E) 25 m^2

Q91) (CM) Duas retas que não possuem pontos comuns são denominadas:

(A) Paralelas (B) Oblíquas (C) Concorrentes (D) Perpendiculares

Q92) (CM) O perímetro de um quadrado cujo lado mede um metro é:

(A) 400 cm (B) 4 cm (C) 40 cm (D) 4000 cm

Q93) (CM) Um triângulo que possui os três lados com a mesma medida é chamado:

(A) Escaleno (B) Retângulo (C) Equilátero (D) Isósceles

Q94) (CM) Se as medidas dos lados de um quadrado forem multiplicadas por três sua área se tornará

(A) 2 vezes maior (B) 3 vezes maior (C) 8 vezes maior (D) 9 vezes maior

Q107) (CM) Um peixe-boi nadou no primeiro dia 8,03 km; no segundo dia, nadou 7,05 hm e no terceiro dia, 112.800 cm. Portanto, o peixe-boi nadou nos três dias uma distância de:

(A) 2680 m (B) 12353 m (C) 9863 m (D) 698,73 m (E) 8985 m

Q109) (CM) Uma mesa quadrada de 2 m de lado foi coberta com uma toalha também quadrada de 1,5 m de lado. O valor da área da mesa não coberta pela toalha é:

(A) 4 m^2 (B) 2,25 m^2 (C) 2,75 m^2 (D) 6,25 m^2 (E) 1,75 m^2

Q114) (CM) Uma piscina vai ser totalmente azulejada. Suas medidas são 1,7 m de profundidade, 15 m de comprimento e 12 m de largura. Qual a área a ser azulejada?

(A) 225,9 m^2 (B) 271,8 m^2 (C) 300,0 m^2 (D) 306,0 m^2 (E) 451,8 m^2

Respostas dos exercícios

E1) a) 48 b) 14 c) 40 d) 19 e) 24
E3) 800 m^2
E4) 16 cm^2
E5) 10 cm^2
E7) 30 cm^2
E8) 1000 cm^3
E9) 96 cm^2
E10) 120 cm^3
E11) a) 2300 m b) 600 m c) 250 m d) 3,5 m e) 1,20 m f) 1,5 m
E12) a) 32 km b) 0,4 km c) 0,4 km d) 0,5 km
E13) a) 0,8 m^2 b) 1,5 m^2 c) 60000 m^2 d) 200 m^2 e) 0,06 m^2
E14) a) 0,06 m^3 b) 7500 m^3 c) 0,04 m^3 d) 6000 m^3 e) 10,5 m^3

Respostas das questões propostas

Q84) Resposta: (B)
Q89) Resposta: (D)
Q91) Resposta: (A)
Q92) Resposta: (A)
Q93) Resposta: (C)
Q94) Resposta: (D)
Q107) Resposta: (C)

Q109) Resposta: (E)
Q114) Resposta: (B)
Q139) Resposta: 258 cm
Q140) Resposta: (C)
Q141) Resposta: (D)
Q142) Resposta: (D)

■

Obtenha a versão mais recente em www.laercio.com.br

MATEMÁTICA PARA VENCER, versão de 132 páginas

/// FIM ///