MATEMÁTICA COMERCIAL E FINANCEIRA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CAPES

UAB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CEARÁ

Ministério da Educação - MEC

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

Universidade Aberta do Brasil

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Diretoria de Educação a Distância

Licenciatura em Matemática

Matemática Comercial e Financeira

Fabiano Porto de Aguiar

Fortaleza, CE
2011

CRÉDITOS

Presidente
Dilma Vana Rousseff

Ministro da Educação
Fernando Haddad

Secretário da SEED
Carlos Eduardo Bielschowsky

Diretor de Educação a Distância
Celso Costa

Reitor do IFCE
Cláudio Ricardo Gomes de Lima

Pró-Reitor de Ensino
Gilmar Lopes Ribeiro

Diretora de EAD/IFCE e Coordenadora UAB/IFCE
Cassandra Ribeiro Joye

Vice-Coordenadora UAB
Régia Talina Silva Araújo

Coordenador do Curso de Tecnologia em Hotelaria
José Solon Sales e Silva

Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática
Priscila Rodrigues de Alcântara

Elaboração do conteúdo
Fabiano Porto de Aguiar

Colaboradora
Lívia Maria de Lima Santiago

Equipe Pedagógica e Design Instrucional
Ana Claúdia Uchôa Araújo
Andréa Maria Rocha Rodrigues
Carla Anaíle Moreira de Oliveira
Cristiane Borges Braga
Eliana Moreira de Oliveira
Gina Maria Porto de Aguiar Vieira
Glória Monteiro Macedo
Iraci Moraes Schmidlin
Irene Moura Silva
Isabel Cristina Pereira da Costa
Jane Fontes Guedes
Karine Nascimento Portela
Lívia Maria de Lima Santiago
Lourdes Losane Rocha de Sousa
Luciana Andrade Rodrigues
Maria Irene Silva de Moura
Maria Vanda Silvino da Silva
Marília Maia Moreira
Maria Luiza Maia
Saskia Natália Brígido

Equipe Arte, Criação e Produção Visual
Ábner Di Cavalcanti Medeiros
Benghson da Silveira Dantas
Davi Jucimon Monteiro
Germano José Barros Pinheiro
Gilvandenys Leite Sales Júnior
José Albério Beserra
José Stelio Sampaio Bastos Neto
Marco Augusto M. Oliveira Júnior
Navar de Medeiros Mendonça e Nascimento
Roland Gabriel Nogueira Molina
Samuel da Silva Bezerra

Equipe Web
Benghson da Silveira Dantas
Fabrice Marc Joye
Luiz Bezerra de Andrade FIlho
Lucas do Amaral Saboya
Ricardo Werlang
Samantha Onofre Lóssio
Tibério Bezerra Soares

Revisão Textual
Aurea Suely Zavam
Nukácia Meyre Araújo de Almeida

Revisão Web
Antônio Carlos Marques Júnior
Débora Liberato Arruda Hissa
Saulo Garcia

Logística
Francisco Roberto Dias de Aguiar
Virgínia Ferreira Moreira

Secretários
Breno Giovanni Silva Araújo
Francisca Venâncio da Silva

Auxiliar
Ana Paula Gomes Correia
Bernardo Matias de Carvalho
Isabella de Castro Britto
Maria Tatiana Gomes da Silva
Charlene Oliveira da Silveira
Wagner Souto Fernandes

Catalogação na Fonte: Islânia Fernandes Araújo (CRB 3 – Nº 917)

A282m Aguiar, Fabiano Porto de.

Matemática Comercial e Financeira / Fabiano Porto de Aguiar; Coordenação Cassandra Ribeiro Joye. - Fortaleza: UAB/IFCE, 2011.

73p. : il. ; 27cm.

ISBN 978-85-475-0031-3

1. MATEMÁTICA FINANCEIRA. 2. MATEMÁTICA COMERCIAL. I. Joye, Cassandra Ribeiro (Coord.). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE. III. Universidade Aberta do Brasil – UAB. IV. Título.

CDD – 510

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Caro(a) estudante,

O presente trabalho é fruto de experiências vivenciadas no Curso de graduação em Ciências Econômicas, na pós-graduação em Gestão Comercial e em experiências profissionais que nos possibilitam ver na prática a aplicação do conteúdo abordado, aliadas a pesquisas extraídas de livros relacionados à matemática comercial e financeira.

O conteúdo apresentado no curso levará você, aluno, a resolver simples operações cotidianas, como também tomar decisões importantes, como a de escolher a melhor opção de compra, se a prazo ou a vista, ou mesmo decisões relacionadas a importantes investimentos realizados por grandes empresas nacionais e multinacionais.

Vamos nos familiarizar com conceitos, como juros simples e compostos; com a forma como os descontos financeiros são concedidos e as vantagens e desvantagens que oferecem; com a noção de capitais equivalentes e com a "montagem" de um fluxo de caixa que nos oriente a tomar a melhor decisão financeira; e, finalmente, vamos entender e conhecer os tipos de empréstimos utilizados pelas instituições bancárias.

Além de temas teóricos que serão de fundamental importância para o melhor entendimento do assunto, vamos utilizar recurso práticos, como exercícios resolvidos, que servirão de base para que você possa resolver os problemas propostos relacionados aos assuntos abordados.

Esperamos que o material sirva como base para suas decisões financeiras e que possa contribuir para o seu desenvolvimento pessoal e profissional.

Agradeço a participação de todos e concluo a aula com meus parabéns a todos os alunos da disciplina de matemática financeira que percorreram um caminho árduo até a conclusão de todo o curso de matemática. Sabemos das dificuldades enfrentadas e a sensação do dever cumprido é a melhor de todas.

Encontro-me à disposição para ajudá-los no que for preciso.

Abraço a todos.
Fabiano Porto

AULA 1 | Juros

Olá aluno(a)!

Nesta aula, vamos estudar um termo que será utilizado por todo nosso curso e será a base para toda operação relacionada à Matemática Financeira e Comercial. Trata-se do Juro, a remuneração que um indivíduo paga a outro pelo uso do dinheiro emprestado, ou também os ganhos sobre alguma aplicação.

Vamos apresentar algumas características importantes dos Regimes de Capitalização, bem como compará-los em determinadas circunstâncias e utilizá-los de forma adequada.

Destacaremos a utilização dos vários tipos de taxas como forma de remuneração do capital emprestado e a frequente utilização dessas taxas em nosso cotidiano.

Finalmente o aspecto mais relevante desta aula será destacar a melhor alternativa financeira, tanto para quem empresta, quanto para quem toma o capital emprestado, para que a transação seja mais lucrativa ou menos onerosa.

Boa Aula!

Objetivos

- Conceituar juros e analisar sua função dentro de operações financeiras
- Conhecer e analisar as diferentes taxas de juros praticadas pelo mercado financeiro
- Distinguir os diferentes tipos de Regimes de Capitalização

TÓPICO 1

Conceitos de Juros

Objetivo

- Compreender a conceituação de Juros no mercado financeiro e os modelos de taxas de juros praticados

O conceito de juros decorre do fato de que a maioria das pessoas preferem consumir seus bens no presente e não no futuro. Quando o indivíduo prefere postergar o uso desse dinheiro, ou seja, substituir o consumo imediato de um determinado bem para o futuro, podemos dizer que o "prêmio" pela abstinência ao consumo imediato é o juro.

"O juro também pode ser entendido como o custo do crédito ou a remuneração de uma aplicação" (MATHIAS; GOMES, 2002, p. 19). Portanto, no primeiro caso, o juro é o pagamento pelo uso do poder aquisitivo por um determinado período de tempo, ou seja, se usamos o consumo mais cedo e recorrermos ao crédito, este será concedido mediante uma recompensa sobre o capital emprestado. No segundo caso, trata-se de um ganho do capital empregado em alguma operação financeira.

SAIBA MAIS!

O conceito de juros surgiu no momento em que o homem percebeu a existência de uma afinidade entre o dinheiro e o tempo. As situações de acúmulo de capital e desvalorização monetária davam a ideia de juros, pois isso acontecia devido ao valor momentâneo do dinheiro. Mais informações no site: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/matematica-financeira.htm

Suponhamos que você queira adquirir um carro, que custa atualmente R$ 30.000,00, e suponha ainda que o preço do carro não irá aumentar nos próximos meses (considere a economia estável).

Agora imagine que um amigo seu deseja tomar emprestado o mesmo valor por um mês pagando ao final os mesmos R$ 30.000,00. Você aceitaria o empréstimo?

Se não aceitou a primeira proposta, agora suponha que seu amigo propôs pagar-lhe R$ 35.000,00 ao final do mês. E agora? Você aceitaria a nova proposta? Se não, quanto você exigiria por adiar por um mês a compra de seu carro novo?

Então vamos visualizar a segunda proposta através do seguinte diagrama:

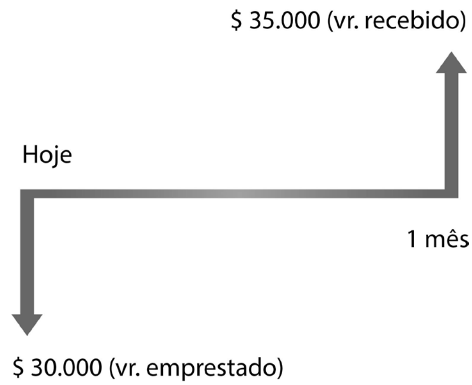


Figura 1 - Fluxo financeiro que representa o empréstimo proposto

Observamos, neste exemplo, que o valor dos juros é a diferença entre o valor recebido e o valor emprestado. Logo, temos:

JUROS (J) = R$ 35.000,00 - R$ 30.000,00 = R$ 5.000,00

Podemos conceituar genericamente juros tanto como uma remuneração de uma aplicação (operação ativa) como um custo de uma captação (operação passiva).

Em nosso estudo e para efeito didático, adotaremos juros por J, valor aplicado por P e o valor de resgate por S. Portanto, temos:

$$J = S - P \quad (1)$$

VOCÊ SABIA?

Os valores de J, S e P têm significados distintos para quem empresta e para quem toma o dinheiro. Por exemplo:

Para quem empresta (você), S é o valor recebido ao final de 1 mês, ou seja, R$ 35.000,00;

Para quem toma o dinheiro (seu amigo), S é o valor pago ao final de 1 mês, os mesmos R$ 35.000,00.

Para os objetivos desta disciplina, designaremos o capital inicialmente aplicado por principal.

1.1 TAXA DE JUROS

Em geral os agentes financeiros podem estabelecer a forma de remuneração ao capital que vai emprestar ao tomador do empréstimo. "A forma mais comum consiste em pactuar, a título de remuneração uma porção do capital emprestado, nesses termos, dá-se o nome de taxa de juros ao percentual incidente sobre o capital concedido". (MILONE, 2006, p.5).

A taxa de juros pode ser definida em termos percentuais ou decimais, em qualquer caso corresponde a relação entre o juro devido e o capital emprestado. Vejamos sua aplicação no exemplo a seguir:

Consideremos a seguinte situação:

EXEMPLO 1

Um empresário tomou R$ 200.000,00 emprestados em um determinado banco e pagou, depois de um ano, R$ 230.000,00.

Pergunta-se:

a) Quanto pagou de juros?

b) Qual foi a taxa de juros da operação?

Lembrando que o valor dos juros, no caso do empréstimo, é a diferença entre o valor pago e o valor recebido, como vimos na fórmula apresentada (1), inicialmente temos:

$$J = S - P$$
$$J = R\$230.000,00 - R\$200.000,00 = R\$30.000,00$$

Para responder a questão b, temos que saber quanto representam esses juros em relação ao valor do empréstimo em termos percentuais.

Portanto temos que encontrar a razão entre o valor dos juros pagos e o valor do empréstimo:

$$\text{TAXA DE JUROS} = \frac{30.000,00}{200.000,00} = 0{,}150 \ \text{ OU } \ 15\% \ \text{ ao ano}$$

Usando esta linha de raciocínio, chegaremos ao conceito de **taxa de juros**. Então:

Chamaremos **Taxa de Juros** a razão entre os juros (J) e o principal (P).

Simbolizando a taxa de juros com a letra "i" (advinda do termo "*interest*", do inglês), teremos:

$$i = \frac{J}{P} \ (2)$$

Se você substituir, na expressão (2), o valor da expressão (1), você obterá outra expressão muito útil na aplicação do cálculo de taxas de juros:

$$i = \frac{S - P}{P} \quad (3)$$

Agora em outra situação:

EXEMPLO 2

Calcule a rentabilidade de um investimento, para uma aplicação de R$100.000,00 e o resgate, ao final de um mês, de R$135.474.00.

Temos que:

P = R$100.000,00;   S = R$135.474,00.

$$i = \frac{135.474,00 - 100.000,00}{100.000,00} = 0,35474 \text{ ou } 35,47\% \text{ a.m.}$$

Considerando que os juros foram auferidos ao final do período de um mês, a taxa de juros ficará expressa para o mesmo período (% a.m.).

Podemos apresentar a taxa de juro sob duas formas. É o que vemos a seguir.

1.1.1 Taxa de Juro Percentual

É a mais usada em nosso dia a dia. Representa o valor pago por cem unidades financeiras tomadas emprestadas (ou aplicadas), na unidade do tempo (dia, mês, ano, etc.). É também chamada de taxa de conversão, sendo usada para apresentação dos problemas. Neste caso, a taxa diz-se aplicada a centos de capital, ou seja, ao que se obtém após dividir-se o capital por 100.

EXEMPLO 3

Qual o juro que rende um capital de R$ 1.000,00 aplicado por 2 anos à taxa de juros de 10% ao ano?

Resolução:

Juro = $\left(\frac{1.000}{100}\right)$ x 10 x 2

Juro = 10,00 x 10 x 2 = R$ 200,00

Portanto, R$ 200,00 é o total de juros que a aplicação rende em 2 anos.

1.1.2 Taxa de Juro Unitária

Trata-se do valor cobrado (ou pago) por uma unidade financeira tomada emprestada (ou aplicada), na unidade de tempo (dia, mês, ano, etc.). Esta é a taxa utilizada nos cálculos.

EXEMPLO 4

O exercício anterior, com a taxa unitária de 0,10 ao ano.

Resolução:

Juro = 1.000,00 x 0,10 x 2

Juro = R$ 200,00

Para transformar a forma percentual em unitária, apenas dividimos a taxa expressa na forma percentual por 100.

EXEMPLO:

Forma Percentual	Transformação	Forma Unitária
12% a.a.	12 / 100	0,12 a.a.
6% a.s.	6 / 100	0,06 a.s.
1% a.m.	1 / 100	0,01 a.m.

Como vimos, a passagem da taxa percentual para a taxa unitária é feita pela **divisão** da taxa percentual por 100. O caminho inverso, ou seja, a transformação da taxa unitária para a percentual é feita pela **multiplicação** da taxa unitária por 100.

Neste tópico iniciamos a compreensão do conceito de Juros e sua aplicação no mercado financeiro e modelos de taxas de juros praticados.

Os conceitos abordados neste tópico servirão para utilização nos demais independente do regime de capitalização utilizado, assunto do nosso próximo tópico.

TÓPICO 2

Regimes de Capitalização

Objetivo

- Conhecer e analisar os modelos de regimes de capitalização existentes na matemática financeira

No tópico anterior, vimos o conceito de juros, a apresentação de algumas fórmulas matemáticas e a introdução do conceito de taxas unitárias e percentuais. Neste segundo tópico, introduziremos outros conceitos elementares da matemática financeira e veremos os termos que constituem a formação dos juros.

Existem critérios que demonstram como os juros são formados e sucessivamente incorporados ao capital no decorrer do tempo. Esses critérios são denominados de **Regimes de Capitalização**. Com eles identificamos a forma segundo a qual se calculam juros pelo dinheiro aplicado ou tomado por empréstimo.

Para nosso conhecimento, Faro (1990, p.4) destaca que "temos dois regimes básicos de capitalização: o continuo e o descontinuo".

A **capitalização contínua** se processa em intervalos de tempo bastante reduzidos, com apuração de juros a qualquer instante dentro do processo de capitalização, não se formando ao final de cada período, e sim continuamente. Apesar de possível, existem dificuldades operacionais que fazem com que esse tipo de modalidade tenha interesses apenas teóricos, não sendo utilizado na prática.

Segundo Neves (1982, p.26), "nada mais é do que uma forma composta, sendo que a incorporação dos juros ao capital se realiza a intervalos infinitesimais de tempo".

Já na **capitalização descontínua**, o juro é formado ao fim de cada período de tempo ao qual se refere à taxa de juro adotada. Segundo Faro (1990, p.8), por essa convenção, adotada nos cálculos de rendimentos das chamadas cadernetas de poupança, o capital passa a evoluir de maneira descontínua."

Nesse caso, os critérios ou regimes de capitalização demonstram como os juros são formados e sucessivamente incorporados ao capital no decorrer do tempo. Dentro desse conceito, são usualmente conhecidos dois processos de obtenção de juros, a saber:

a) Regime de Capitalização Simples (juros simples / juros lineares);

b) Regime de Capitalização Composta (juros compostos / juros exponenciais).

A seguir, analisaremos cada um destes Regimes de Capitalização.

2.1 JUROS SIMPLES

O Regime de Capitalização Simples ou Juro Simples é bastante utilizado no mercado financeiro pela aplicabilidade e simplicidade operacional de seus cálculos. Em nosso dia a dia, nos deparamos constantemente com diversas situações nas quais usamos esse tipo de regime, como, por exemplo, operações em curtíssimo prazo, ou seja, aquelas operações com período inferior a 30 dias, além das operações de desconto.

É importante destacarmos que a característica básica deste regime de capitalização é que, para uma taxa de juro e períodos constantes, o juro (J) de cada período será sempre o mesmo, pois é calculado sobre o valor do capital inicial aplicado (P), em outras palavras, apenas o capital inicial rende juro.

Na maioria das vezes usamos a capitalização simples em operações de curto prazo, como no exemplo apresentado a seguir:

EXEMPLO 5

Uma empresa apresenta a um banco uma proposta de empréstimo de R$1.000,00 pelo prazo de 3 meses. O banco cobra nesta operação uma taxa de juros de 20% a.m. Desejamos conhecer o valor que a proponente deverá reembolsar ao final do prazo pactuado, considerando o regime de juros simples.

Primeiramente vamos identificar as variáveis financeiras envolvidas:

valor do empréstimo (P) = R$ 1.000,00

taxa de juros (i) = 20 % a.m.

prazo (n) = 3 meses

Para melhor visualização do valor a ser reembolsado, adotaremos a seguinte planilha:

PRAZO (n)	PRINCIPAL (P)	TAXA (i)	JUROS	JUR.ACUM.	SALDO DEVEDOR
(MESES)	($)	(%)	($)	($)	($)
0	1.000,00				1.000,00
1		20%	200,00	200,00	1.200,00
2		20%	200,00	400,00	1.400,00
3		20%	200,00	600,00	1.600,00
TOTAL	1.000,00	-	600,00		1.600,00

Quadro 1 – Reembolso sobre o capital emprestado no sistema de juros simples

Diante dos resultados encontrados, podemos chegar às seguintes conclusões:

a) os juros de cada período foram obtidos pela multiplicação da taxa de juros pelo valor do principal, ou seja:

J = R$ 1.000,00 x 0,2 = R$ 200,00

Assim, o valor dos juros no final de cada período é encontrado pelo produto do principal (P) com a taxa de juros (i). Teríamos então:

Período	Juros no Período	Juros Acumulados
1º	P . i	P . i
2º	P . i	(P . i) + (P . i) = P . i .2
3º	P . i	(P . i) + (P . i) + (P . i) = P . i .3

Generalizando, os juros totais cobrados seriam:

$$J = P.i.n \quad (4)$$

onde "n" é a quantidade de períodos (no exemplo, meses) contidos no prazo da operação.

Na situação da planilha acima, temos os juros do período:

$$J = R\$1.000,00 \times 0,2 \times 0,3 = \$600,00$$

o saldo (ou montante), no final de cada período (meses, no exemplo), é formado pela soma do saldo inicial (P) com o valor dos juros acumulados até o mesmo período. Logo, você deve ter concluído que:

Montante (S) = Principal (P) + Juros (J)

$$S = P + J \quad (5)$$

c) observando-se a evolução dos juros acumulados ao longo do período da operação, existe uma razão constante entre o valor desses juros e o período decorrido, a qual corresponde ao valor dos juros do primeiro período. Vejamos o gráfico a seguir:

Relações:

$$\frac{200}{1}=\frac{400}{2}=\frac{600}{3}=200$$

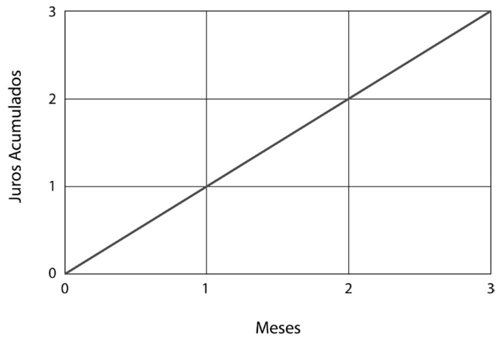


Figura 2 - Crescimento linear (juros lineares) em regime de juros simples

Agora, aplicaremos as expressões (4) e (5) para que possamos encontrar o montante ou saldo da operação no seu vencimento:

$$S=P+J$$
$$S=P+P.i.n=P(1+i.n)$$
$$S=P(1+in)\ \ \mathbf{(6)}$$

Portanto, o montante procurado no exemplo anterior seria obtido assim:

Dados: P = R$ 1.000,00; i = 0,2 a.m.; n = 3 meses

S = R$ 1.000,00 x (1 + 0,2 x 3)

S = R$ 1.600,00

Observamos que, nos cálculos dos juros e dos montantes de todos os exemplos anteriores, além de usarmos as taxas na **forma unitária**, usamos também a taxa e o prazo homogeneizados, isto é, a taxa e o prazo expressos na **mesma unidade de tempo**.

Esta transformação é indispensável nos cálculos de juros e montantes simples e também se aplicará (como veremos posteriormente) nos casos de capitalização composta.

Partindo-se da expressão geral do montante (6), podemos calcular P, n e i, usando as seguintes fórmulas, deduzidas por técnicas algébricas:

SAIBA MAIS!

Para mais informações sobre ACC, acesse o site https://www.bb.com.br/pbb/pagina-inicial/empresas/produtos-e-servicos/comercio-exterior/vendas-para-o-exterior/adiantamento-sobre-o-contrato-de-cambio-(acc/ace)#/

SAIBA MAIS!

O Método Hamburguês introduz uma simplificação nos cálculos de juros simples, quando há diversos valores de principal, aplicados por diversos prazos, a uma mesma taxa de juros. É o método empregado pelos bancos para o cálculo dos juros incidentes sobre os saldos devedores em conta corrente e cheque especial. Fonte: https://www.algosobre.com.br/matematica-financeira/metodo-hamburgues.html

VOCÊ SABIA?

FNE – Federação Nacional de Educação

FINAME – Financiamento de Máquinas e Equipamentos

POC – Plano Oficial de Contabilidade

BID – Banco Interamericano de Desenvolvimento

$$P = \frac{S}{1 + i.n} \qquad (7)$$

$$i = \frac{\frac{S}{P} - 1}{n} \qquad (8)$$

$$n = \frac{\frac{S}{P} - 1}{i} \qquad (9)$$

Na prática, as aplicações de juros simples mais conhecidas no mercado financeiro são:

Adiantamentos sobre Contratos de Câmbio (ACC);

Desconto de títulos (duplicatas e notas promissórias);

Hot-Money;

Utilização do método hamburguês para cálculo de juros de financiamentos contratados com recursos do FNE, FINAME, POC, BID, entre outros.

2.1.1 Taxas proporcionais

Ao considerarmos duas taxas de juros arbitrárias i_1 e i_2, relacionadas respectivamente aos períodos n_1 e n_2, referidos à unidade comum de tempo e taxas, podemos deduzir que $\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}$ (MATHIAS; GOMES, 2002, p. 27).

Para transformar uma taxa de juros simples de 30% a.m. em taxa diária, dividimos por 30 e obtemos 1% a.d.

Assim temos: $\frac{30}{i_2} = \frac{1}{30}$

Portanto as taxas de 30% ao mês e 1% ao dia são ditas **proporcionais**, porque quando as convertemos para o mesmo período, sob o regime de **juros simples**, obtemos o mesmo resultado.

Vamos converter as duas taxas mencionadas para um período de 15 dias:

30 % a.m. = $\frac{30}{2}$ = 15% a q. (à quinzena)

1 % a.d. = 1 x 15 = 15% a.q.

Analisemos, agora, a seguinte situação:

EXEMPLO 6

Calcule a taxa de juros mensal de uma operação a juros simples, sabendo-se que a taxa anual é de 8% a.a.

Agora encontremos a taxa unitária: $\frac{8}{100}$

$\frac{0{,}08}{12}$ = 0,006667 a.m. ou 0,6667% a.m.

Logo, 8% ao ano e 0,6667% ao mês são proporcionais.

EXEMPLO 7

Verifique se a taxa de 5% ao trimestre (a.t) e de 20% ao ano (a.a) são proporcionais:

Resolução:

Temos :

$$i_1 = 5\% a.t. = 0{,}05 a.t.$$
$$i_2 = 20\% a.a. = 0{,}2 a.a.$$
$$n_1 = 3 meses$$
$$n_2 = 12 meses$$

como: $\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}$ Substituindo os valores: $\frac{0{,}05}{0{,}20} = \frac{3}{12}$

Dizemos que são grandezas proporcionais, pois o produto dos meios (0,20 x 3) é igual ao produto dos extremos (0,05 x 12). Logo as taxas dadas são **proporcionais**.

2.2 JUROS COMPOSTOS

De modo geral, as operações feitas no mercado financeiro seguem o regime de Juro Composto, por esta razão, é de suma importância o entendimento deste tipo de regime de capitalização, dada sua aplicabilidade no âmbito dos negócios como também em nosso cotidiano.

A conceituação básica de juro composto é dada pela forma de calcular o juro de cada período. No caso desse regime de capitalização, o cálculo do juro é feito a cada período, tomando como base o saldo existente no período anterior. Esse valor é composto pelo principal mais o juro existente no período anterior.

Já ouvimos falar várias vezes em nosso dia a dia a expressão "juro sobre juro", que é a forma que vamos encontrar neste modelo.

Para um melhor comparativo dos dois regimes, vamos voltar ao exemplo mostrado no Juro Simples, no qual um cliente propõe a um banco um empréstimo de R$ 1.000,00 por 3 meses. Suponha que o banco cobre do cliente a mesma taxa de juros, 20% ao mês, só que agora adotando o regime de juros compostos.

Agora observemos a evolução do saldo devedor:

Período de Tempo (n)	Saldo no início do mês (Sa)	Juros (Sa.i)	Juros Acumulados	Saldo no final do mês
0				1.000
1	1.000	1.000x0,20 = 200,00	200,00	1.000+200 = 1.200,00
2	1.200	1.200X0,20 = 240,00	440,00	1.200+240 = 1.440,00
3	1.440	1.440X0,20 = 288,00	728,00	1.440+288 = 1.728,00

Quadro 2 – Reembolso sobre o capital emprestado no sistema de juros compostos

No quadro acima, todas as vezes que calculamos os juros de um período, somamos esses juros ao principal do período subsequente. O total encontrado passa a ser o saldo inicial para se calcular os juros do período seguinte e assim sucessivamente. Portanto, a cada período os juros são incorporados ao principal para a formação dos juros do período seguinte, o que caracteriza uma sistemática diferente dos cálculos de juros simples, na qual os juros calculados não são incorporados ao principal, ou seja, o valor principal não sofre alteração, permanecendo constante.

Esta sistemática de cálculo de juros é chamada de **juros compostos** ou **regime de capitalização composta** e, como no caso de juros simples, a diferença entre o saldo obtido (montante) e o principal, representa os juros (compostos), ou seja, J = S - P, que no exemplo é:

$$J = R\$\ 1.728,00 - R\$\ 1.000,00 = R\$\ 728,00.$$

Podemos chegar ao mesmo resultado da tabela anterior na forma de fórmulas adotadas, se não vejamos:

Vamos calcular S1 e S2 :

$J = P.i$

$S = P + J$

Para o 1º período, temos:

$$S_1 = P + J \qquad S_1 = 1.000 + 1.000 \,.\, i$$
$$S_1 = P + P \,.\, i \qquad S_1 = 1.000 + 1.000 \,.\, 0{,}20$$
$$S_1 = P(1 + i) \qquad S_1 = 1.000\,(1 + 0{,}20) = 1.200$$

Para o 2º período, o valor de P passa a ser o montante S1:

$$S_2 = S_1 + J \qquad S_2 = 1.200 + 1.200 \,.\, i$$
$$S_2 = S_1 + S1 \,.\, i \qquad S_2 = 1.200 + 1.200 \,.\, 0{,}20$$
$$S_2 = S_1(1 + i) \qquad S_2 = 1.200\,(1 + 0{,}20) = 1.440$$

Como S1 = P(1 + i), temos:

$$S_2 = P(1 + i) \,.\, (1 + i) \qquad S_2 = 1.000\,(1 + 0{,}20) \,.\, (1 + 0{,}20)$$
$$S_2 = P(1 + i)^2 \qquad S_2 = 1.000\,(1 + 0{,}20)^2 = 1.440$$

Podemos deduzir então que:

$$S_3 = P(1 + i)^3 \qquad S_3 = 1.000\,(1 + 0{,}20)3 = 1.728$$

E, generalizando:

$$S = P(1 + i)^n \quad (10)$$

Onde,

S = montante

P = principal

n = período

ATENÇÃO!

A expressão $(1+i)^n$ é chamada de *Fator de Capitalização* ou *Fator de Acumulação de Capital*.

Veja que, para se chegar ao montante ao final de um período, basta utilizar a fórmula (10), ou seja, não é necessário calcular os montantes intermediários como foi feito na planilha anterior.

Observando-se a evolução dos juros acumulados ao longo do período da operação, podemos concluir que, diferentemente do regime de juros simples, existe uma razão *variável* entre o valor desses juros e o prazo decorrido. Observe este fato no gráfico a seguir:

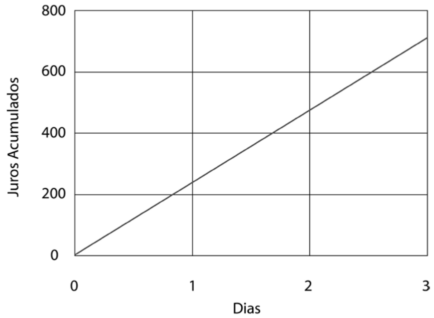


Figura 3 - Curva com crescimento exponencial no regime de juros compostos

Resolução:

$$\frac{200}{1} \neq \frac{440}{2} \neq \frac{728}{3}$$

Como o fator de capitalização dos juros compostos caracteriza uma função do tipo exponencial, dizemos que os juros, no regime de juros compostos, crescem *exponencialmente*. Veja como a linha formada no gráfico acima não é simétrica como a linha de juros simples.

GUARDE BEM ISSO!

a) Usualmente, o mercado financeiro trabalha com esta modalidade de juros;

b) Chamamos de *capitalização* à sistemática de incorporação periódica de juros ao capital;

O período de capitalização corresponde ao período decorrido entre duas capitalizações sucessivas. (Em nosso exemplo, equivale a 1 mês, ou seja, nossa capitalização é mensal).

Podemos calcular **P**, no regime de juros compostos, usando a fórmula abaixo que pode ser deduzida a partir da fórmula (10):

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} \quad (11)$$

É importante observar que a convenção de se usar a taxa na forma unitária e a homogeneidade entre a taxa e o prazo (os dois devem estar na mesma unidade de tempo) continua sendo essencial, conforme já havíamos destacado.

2.2.1 Taxas equivalentes

Podemos dizer que duas ou mais taxas são consideradas equivalentes quando, aplicadas sobre o mesmo capital, por um mesmo prazo, produzem os mesmos juros ou o mesmo montante.

Como havíamos estudado no tópico anterior, vimos este conceito também aplicado ao regime de juros simples (taxas proporcionais). Todavia, no mercado financeiro, quando se fala em taxas equivalentes, subentende-se o regime de juros compostos.

EXEMPLO 8

Quais os juros produzidos pela aplicação de um capital de R$ 100, por um prazo de 1 ano, no regime de juros compostos, às taxas de 12,68% a.a., 3,0301% a.t. e 1% a.m.?

Solução:

$S = P \times (1 + i)^n$

$J = S - P$

a) 12,68%a.a.

$S = R\$100 \times (1{,}1268)$

$S = R\$112{,}68$

$J = 112{,}68 - 100$

$J = R\$\ 12{,}68$

b) 3,0301% a.t.

$S = R\$100 \times (1{,}030301)^4$

$S = R\$100 \times (1{,}1268)$

$S = R\$112{,}68$

$J = 112{,}68 - 100$

$J = R\$\ 12{,}68$

c) 1% a.m.

$S = R\$100 \times (1{,}01)^{12}$

$S = R\$100 \times (1{,}1268)$

$S = R\$112{,}68$

$J = 112{,}68 - 100$

$J = R\$\ 12{,}68$

GUARDE BEM ISSO!

Atente para o fato de que o período n sempre é transformado para o período anual, para que possamos trabalhar uniformemente com taxas e prazos na mesma unidade de tempo, ou seja, 12 meses = 1 ano e 4 trimestres = 1 ano.

Através do exemplo acima, podemos concluir que as taxas de 12,68% a.a., 3,0301% a.t. e 1% a.m. são **equivalentes**, já que produziram os mesmos juros, no mesmo período, no regime de juros compostos.

Agora apresentaremos algumas expressões utilizadas para o cálculo de taxas equivalentes:

Generalizando, temos:

$P(1 + I) = P(1 + i)^n$ ou $(1 + I) = (1 + i)^n$

onde:

I = taxa maior (alusiva a todo o período da operação)

i = taxa menor (alusiva a um subperíodo da operação)

n = número de subperíodos da taxa menor (i) contidos no prazo da taxa maior (I), numa mesma unidade de tempo

Fórmula para Encontrar a Taxa Equivalente Maior (I):

Como $(1 + I) = (1 + i)^n$, temos:

$$I = (1 + i)^n - 1 \quad (12)$$

Fórmula para Encontrar a Taxa Equivalente Menor (i):

Como $(1 + I) = (1 + i)^n$, temos:

$\sqrt[n]{(1 + I)} = \sqrt[n]{(1 + i)^n}$ (extraindo a raiz n de ambos os membros da equação)

$\sqrt[n]{(1 + I)} = (1 + i)$

$(1 + I)^{\frac{1}{n}} = (1 + i)$

$$i = (1 + I)^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (13)$$

Observe que o denominador do expoente "1/n" nada mais é do que o prazo da taxa maior dividido pelo prazo da taxa menor.

EXEMPLO 9

1) Cálculo da taxa anual equivalente a 0,5% a.m.

i = 0,5 % a.m.

I = ? % a.a.

$$n = \frac{\text{prazo da taxa maior (\% a.a.)}}{\text{prazo da taxa menor (\% a.m.)}} = \frac{12}{1} = 1\text{:}$$

$I = (1 + i)^n - 1$

$I = (1 + 0{,}005)^{12} - 1$ ou 0,06168 a.a. ou I = 6,168% a.a.

2) Cálculo da taxa diária equivalente à taxa de 40% em 45 dias.

I = 40% em 45 dias

i = ? % a.d.

$$n = \frac{\text{prazo da taxa maior (\% em 45 dias)}}{\text{prazo da taxa menor (\% a.d.)}} = \frac{45}{1} = 45$$

$i = (1 + i)^{1/n} - 1$

$i = (1 + 0{,}40)^{1/45} - 1$ I = 0,751% a.d.

Portanto, podemos afirmar que a diferença básica entre taxas proporcionais e equivalentes estão relacionadas ao regime de juro considerado. Enquanto as primeiras baseiam-se em juro simples, as segundas estão ligadas a juro composto.

2.2.2 Taxas efetivas

Uma taxa é dita **efetiva** quando a sua unidade de referência de tempo coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização.

Consideremos os seguintes exemplos:

- 7% ao ano, com capitalização anual;
- 4,5% ao semestre, com capitalização semestral; ou ainda
- 5% ao mês, com capitalização mensal.

Nos três casos citados, o período da taxa e o período de capitalização coincidem, ou seja, ambos se referem ao mesmo período de tempo. Portanto, podemos concluir que as taxas acima mencionadas são **efetivas**.

Uma característica básica da taxa efetiva é permitir avaliar o custo ou a rentabilidade de negócios. Em sua forma mais simplificada, a taxa efetiva no período é expressa pela divisão entre o montante ao final do período e o principal. Veja o diagrama:

Onde:

$$1+i=\frac{S}{P}$$
$$i=\frac{S}{P}-1$$

Figura 4 - Fluxo de entrada e saída de capital

É válido afirmar que a taxa efetiva corresponde exatamente ao custo do dinheiro.

Quando as unidades de tempo e do período de capitalização coincidirem, não é necessário mencionar o período de capitalização: assim quando temos 12% a.a. e não se mencionou o período de capitalização, pressupõe-se que seja anual e consequentemente a taxa é efetiva.

2.2.3 Taxas nominais

Uma taxa é chamada **nominal** quando a sua unidade de referência de tempo NÃO coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização.

Assim temos exemplos como:

- 6% ao ano, com capitalização mensal (caderneta de poupança);
- 4,5% ao semestre, com capitalização trimestral; ou ainda
- 5% ao mês, com capitalização diária.

Logo concluímos que, nos exemplos acima, o período da taxa e o período de capitalização NÃO são iguais, ou seja, não se referem ao mesmo período de tempo. Logo, trata-se de taxas **nominais**.

2.2.4 Transformação de taxa nominal em efetiva e vice-versa

Como uma taxa nominal nada mais é do que uma taxa efetiva expressa noutro período de tempo, através de um tratamento linear, podemos concluir que:

$$i_N = i_E \times n \quad \text{e} \quad i_E = \frac{i_N}{n}$$

onde,

i_E = taxa efetiva;

i_N = taxa nominal; e

n = prazo da taxa nominal dividido pelo prazo da taxa efetiva, expressos na mesma unidade de tempo.

EXEMPLOS

1) Qual a taxa efetiva de juros, em termos anuais, de uma taxa de 6% a.a. com capitalização mensal (cadernetas de poupança)?

Solução:

i_N a.a. = 6% a.a. c/capitalização mensal

i_E a.a. = ?

$$i_E = \frac{i_N}{n}$$

$$i_E \text{ a.m.} = \frac{6\%}{12} = 0{,}5\% \text{ a.m.}$$

aplicando a fórmula 12, temos: $i_E \text{ a.a.} = (1+0{,}005)^{12} - 1 = 0{,}6168$

ou i_E a.a. = 6,168% a.a

Portanto para uma taxa anual de caderneta de poupança (capitalizada mensalmente), temos uma taxa efetiva de 6,168% a.a.

2) Qual a taxa nominal, expressa em termos anuais, correspondente à taxa efetiva de 1% a.m.?

Solução:

Temos: i_E a.m. = 1% a.m.

i_N a.a. = ?

i_N a.a. = iE x n

i_N a.a. = 0,01 x 12

i_N a.a. = 12% a.a.

Portanto para uma taxa efetiva de 1% a.m., temos uma taxa nominal expressa em termos anuais de 12%.

2.3 JUROS SIMPLES X JUROS COMPOSTOS

No regime de juros simples, como já foi apresentado, apenas o capital inicial rende juros e estes são diretamente proporcionais ao tempo e à taxa.

Já no regime de juros compostos, os juros gerados pela aplicação são incorporados ao capital para participarem na formação dos juros dos períodos subsequentes. Esse tipo de capitalização é bem mais usual em instituições financeiras.

Em termos numéricos, a capitalização simples é associada a Progressões Aritméticas (P.A.) e a composta, a progressões geométricas (P.G.); em termos funcionais, a capitalização simples é definida por funções lineares e composta, por funções exponenciais.

SAIBA MAIS!

Progressão Aritmética (PA): Toda sequência numérica cujos termos a partir do segundo, são iguais ao anterior somado com um valor constante denominado razão. Ex: (1, 5, 9, 13, 17, 21, ...), razão = 4 (PA crescente). Fonte: https://www.somatematica.com.br/emedio/pa/pa2.php.

Progressão Geométrica (PG): Qualquer sequência de números reais ou complexos, onde cada termo a partir do segundo, é igual ao anterior, multiplicado por uma constante denominada razão. Ex: (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...), razão = 2 (PG crescente). Fonte: https://www.somatematica.com.br/emedio/pg.php

Observemos as principais diferenças através da tabela que representa a base de cálculos e posteriormente visualizaremos com um exemplo prático:

	JUROS SIMPLES	JUROS COMPOSTOS
Base de Cálculo	capital inicial	capital + juros acumulados
Juros	J = P i n	J=P.[(1 + i)n -1]
Montante	S = P.(1 + i.n)	S = P.(1 + i)n

GUARDE BEM ISSO!

Se J = S - P então, substituindo S por sua fórmula equivalente, temos:

J = P(1 + i)n - P e, colocando P em evidência, J = [P(1 + i)n - 1]

Seja um principal de R$ 1.000,00 aplicado à taxa de 20% a.a. por um período de 4 anos a juros simples e compostos.

Dados:

P = R$ 1.000,00

i = 20% a.a.

n = 4 anos

n	Juros Simples		Juros Compostos	
	Juro por período	Montante	Juro por período	Montante
1	1.000 x 0,2 = 200	1.200	1.000 x 0,2 = 200	1.200
2	1.000 x 0,2 = 200	1.400	1.000 x 0,2 = 240	1.440
3	1.000 x 0,2 = 200	1.600	1.000 x 0,2 = 288	1.728
4	1.000 x 0,2 = 200	1.800	1.000 x 0,2 = 346	2.074

Quadro 3 – Comparativo entre capitalização simples e composta (MATHIAS; GOMES, 2002, p. 98)

Abordamos, neste tópico, os juros, bem como os regimes de capitalização mais utilizados no mercado financeiro e a relação entre as taxas de cada regime. É importante observar como o processo de juros é incorporado em cada regime e a diferença e vantagens da utilização dos modelos estudados, tanto na visão do tomador do empréstimo como também na de quem emprestou o capital.

Os exercícios práticos apresentados nas atividades de aprofundamento, lista de exercícios e exercícios disponibilizados no ambiente virtual serão de fundamental importância para a compreensão desta primeira aula de nossa disciplina.

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1. Alexandre emprestou a Rafael R$ 700, que serão pagos em 3 meses a uma taxa de juros de 10% a.m. Qual o valor dos juros cobrados por Alexandre?

2. Um banco pretende pagar R$ 1.000,00 daqui a um ano para quem depositar hoje R$ 800,00. Qual a taxa de juros desse investimento?

3. Transforme as seguintes taxas percentuais em unitárias:

Taxa Percentual	Taxa Unitária
23%	
34,5%	
2,56	
50%	
0,95%	
2.500%	

Qual o aumento percentual gerado pela forma unitária de 0,4567?

4. Adriano tem R$ 1.500,00 e emprestou para um amigo cobrando uma taxa de juros de 20% a.m. Qual o valor que será devolvido pelo amigo após 1 mês de realizado o empréstimo?

AULA 2 | Descontos

Olá aluno(a),

Na aula passada vimos a importância da cobrança de juros na matemática financeira e suas implicações.

Esta 2ª aula será dedicada ao estudo das operações de desconto que são aplicadas frequentemente pelas instituições financeiras. Quando pensamos em desconto, logo pensamos em redução de preço de um determinado produto, seja em vendas em grandes quantidades ou em pagamentos a vista.

Na matemática financeira o desconto surge quando o detentor do título de crédito necessita transformá-lo em dinheiro antes da data do vencimento; o valor resgatado deverá ser inferior ao valor nominal. A diferença entre o valor nominal do título e o valor pago por ele após ser resgatado antecipadamente, chamamos de desconto.

Estudaremos as formas de descontos mais utilizadas, como são classificadas e a forma de calcular em regimes diferentes.

Boa aula!

Objetivos

- Conceituar desconto em operações financeiras
- Conhecer os principais títulos públicos
- Conhecer e diferenciar os tipos de descontos mais utilizados no mercado financeiro
- Identificar os descontos existentes em matemática financeira

TÓPICO 1

Conceito de desconto

OBJETIVOS

- Definir desconto em operações financeiras
- Conhecer os principais títulos públicos e suas aplicações
- Aplicação do desconto racional simples ou "desconto por dentro"
- Aplicação do desconto comercial ou "desconto por fora"
- Relacionar os descontos existentes no mercado

Após estudarmos juros e os modelos de regimes de capitalização existentes, vamos entender a relação de desconto em termos financeiros.

Desconto é a parcela paga por se receber, antecipadamente, uma determinada quantia a que se teria direito no futuro. Podemos reconhecer essa situação de recebimento antecipado em caso de resgate de título antes da aplicação, ou mesmo no caso de uma empresa que, ao realizar uma venda a prazo, receba uma duplicata com vencimento determinado e vá ao banco transferir a posse da duplicata antes do prazo de vencimento.

Para melhor entendimento, vamos supor que uma empresa possua um título de crédito de valor N, a ser resgatado após um período n, contado a partir de hoje. Desejando receber antecipadamente tal crédito, a empresa se dispõe, junto a um banco, a receber uma quantia menor V, face a antecipação do crédito.

O valor do desconto, representado por D, corresponde à diferença entre o valor que se receberia no vencimento do título e o valor antecipado pelo banco:

$$D = N - V \quad \textbf{(14)}$$

1.1 TÍTULOS

Para entendermos a aplicação dos descontos financeiros, é necessário conhecer e entender por que as instituições financeiras emitem documentos chamados de títulos de créditos.

"Titulo é o nome genérico de um documento que consolida uma dívida ou capta recursos para financiamento posterior de alguma atividade econômica" (MILONE, 2006, p.11).

Como exemplos de títulos, podemos citar as cadernetas de poupança, ações, debêntures, planos de aposentadorias, duplicatas, notas promissórias, letras de câmbio, entre outros.

Entre os exemplos listados, dois títulos são muito utilizados pelos agentes econômicos e merecem destaque e atenção, são eles:

1. **Duplicata**: Título emitido por uma pessoa jurídica contra pessoa física ou jurídica, regido por um contrato, no qual se discrimina o valor da mercadoria ou serviço prestado, a data da aceitação e do prazo de quitação e as partes envolvidas no negócio;
2. **Nota Promissória**: Título correspondente a uma promessa de pagamento, utilizado entre pessoas físicas ou entre pessoas físicas e uma instituição financeira.

1.2 DESCONTO RACIONAL SIMPLES OU DESCONTO "POR DENTRO"

É o desconto obtido pela diferença entre o valor nominal e o valor atual ou presente de um compromisso saldado em n períodos antes de seu vencimento.

O desconto é a quantia a ser abatida do valor nominal e o valor descontado é a diferença entre o valor nominal e o desconto.

No desconto racional ou "por dentro", seguem-se as regras básicas do regime de juros simples, adotando-se as seguintes correlações:

N: Valor Nominal (ou montante S);

V: Valor Atual (ou valor descontado racional ou principal P);

n: Número de períodos antes do vencimento (antecipação);

i: Taxa de desconto;

D: Valor do desconto concedido.

Então, por substituição da fórmula (7) do juro simples, temos: $V = \dfrac{N}{1 + in}$ **(15)**

Como D = N – V, temos a seguinte fórmula: $D = \dfrac{N.i.n}{1 + i.n}$ **(16)**

Com esta fórmula, chegamos ao valor do desconto racional, calculado para um dado valor nominal (N), a uma taxa de juros (i), para um dado prazo de antecipação (n).

Nesse caso de juros simples, o valor descontado é o próprio valor atual.

EXEMPLO 1

Uma pessoa pretende saldar um título de R$ 5.500,00, 3 meses antes de seu vencimento. Sabendo-se que a taxa de juros corrente é de 40% a.a., qual o desconto concedido e quanto vai obter?

Temos: N = 5.500,00
n = 3 meses
i = 40% a.a.

Calculando a taxa proporcional a 1 mês temos: i12 = 0,40 / 12

Agora podemos calcular:

a) desconto: $D = \dfrac{N.i.n}{1 + i.n}$

D = R$ 500,00

b) valor descontado: V = N – D = R$ 5.000,00

A resolução acima pode ser comprovada da seguinte forma. Concluímos que R$ 5.000,00 é o valor atual do compromisso. De fato, nos próximos 3 meses, a uma taxa de 40% a.a., uma aplicação de R$ 5.000,00 renderia:

J = P.i.n, então J = R5.000,00 x 0,4 / 12 x 3 = R$ 500,00

Podemos observar no exemplo que R$ 500,00 é o valor do juros que a pessoa deixa de receber, saldando o compromisso antes do vencimento, portanto:

$$D = J = Pin$$

Logo, no regime de juros simples, o desconto racional aplicado ao valor nominal é igual ao juro devido sobre o capital (valor descontado), desde que ambos sejam calculados à mesma taxa, ou seja, a taxa de juros da operação é também a taxa de desconto (MATHIAS, 2002, p. 62).

EXEMPLO 2:

Uma duplicata foi descontada 2 meses antes de seu vencimento, sendo pago por ela o valor de R$ 5.600,00. Se a taxa de desconto usada foi de 9% a.m., qual o valor nominal da duplicata?

Solução:

Temos: V = 5.600,00
n = 2 meses
i = 9% a.m.

Como $D = J = Pin$, e V = P, temos:

D = V.i.n

D = 5.600 x 0,09 x 2

D = R$ 1.008,00

N = V + D

N = 5.600 + 1.008

N = R$ 6.608,00

O valor nominal da duplicata é de R$ 6.608,00.

1.3 DESCONTO COMERCIAL OU DESCONTO "POR FORA"

Nesse desconto, o valor é obtido pelo cálculo do juro simples sobre o valor nominal do compromisso que seja saldado n períodos antes do vencimento:

Portanto adotaremos as seguintes correlações:

N: Valor Nominal (ou montante S);

Vc: Valor Atual (ou valor descontado comercial);

n: Número de períodos antes do vencimento (antecipação);

i: Taxa de desconto;

Dc: Desconto comercial

Por definição, obtemos o valor do Desconto Comercial através da seguinte fórmula:

$$\boxed{D_c = N.i.n} \quad \textbf{(17)}$$

E também o Valor Descontado Comercial ou Valor Atual Comercial:

$$V_c = N - D_c$$

$$V_c = N - Nin$$

$$\boxed{V_c = N(1 - in)} \quad \textbf{(18)}$$

EXEMPLO 3

Vamos considerar o mesmo exemplo do item anterior, em que um título de R$ 5.500,00, é descontado 3 meses antes de seu vencimento a uma taxa de 40% a.a.

Solução:

Temos: N = 5.500,00

n = 3 meses

i = 0,40 a.a.

Agora vamos calcular:

a) Desconto Comercial:

$$D_c = N.i.n$$

$$D_c = 5.000 \text{ x } \frac{0,40}{12} \text{ x } 3 = \text{R\$ } 550,00$$

b) O Valor Descontado Comercial:

$$V_c = N(1 - in)$$

$$V_c = 5.500 \text{ x } \left(1 - \frac{0,40}{12} x3\right)$$

$$V_c = \$ \ 4.950,00$$

Conclui-se que a pessoa irá receber R$ 4.950,00 pelo desconto comercial, menor do que os R$ 5.000,00 que receberia no desconto racional. Observamos, então, que o banco ganha R$ 550,00 sobre o valor de R$ 4.950,00 em 3 meses.

EXEMPLO 4

Uma Nota Promissória de R$ 8.300,00 foi descontada 5 meses antes do seu vencimento a uma taxa de 7% a.m. Qual o valor comercial recebido?

Temos: N = 8.300,00

n = 5 meses

i = 7% a.m.

GUARDE BEM ISSO!

"O Desconto Por Dentro é a parcela a ser deduzida do titulo, calculada a juros simples sobre o valor atual (ou valor de resgate) do papel. O Desconto Por Fora ou Comercial é a parcela a ser deduzida do titulo, calculada a juros simples sobre o valor nominal (ou valor de face) do papel". (SÁ, 2008, p. 63).

$D_c = N.i.n$

$D_c = 8.300x5x0,07$

$D_c = 2.905,00$

$V_c = N - D_c$

$V_c = 8.300\text{-}2.905$

$V_c = \ 5.395,00$

Portanto o valor comercial recebido na transação é de R$ 5.395,00.

1.4 TAXA DE JUROS EFETIVA EM TAXA DE DESCONTO COMERCIAL

Taxa de juros efetiva é a taxa de juros que, aplicada sobre o Valor Descontado, comercial ou bancário, gera, no período considerado, um montante igual ao valor nominal.

No caso da taxa efetiva, temos as seguintes correlações:

if: Taxa efetiva;

Vc: Valor Atual (ou valor descontado comercial);

n: Número de períodos antes do vencimento (antecipação);

Então, na taxa efetiva para desconto comercial, temos:

$$N = V_c(1 + i_f.n)$$

$$\frac{N}{V_c} = 1 + i_f.n$$

$$\boxed{i_f = \frac{\frac{N}{V_c} - 1}{n}} \quad \textbf{(19)}$$

Reportando-nos ao exemplo 1, temos os seguintes valores:

$V_c = 4.950,00$

$N = 5.000,00$

$n = 3$

Aplicando a fórmula da taxa efetiva, temos:

$$i_f = \frac{\frac{N}{V_c} - 1}{n}$$

$$i_f = \frac{\frac{5.500}{4.950} - 1}{3}$$

$$i_f = 0,0370 \text{ a.m}$$

$i_f \cong 0{,}44$ a.a

Como já observamos anteriormente, no desconto racional, a taxa de desconto é a própria taxa efetiva, portanto existe um método mais simples para o cálculo da taxa efetiva. A taxa efetiva será aquela taxa que conduz, pelo desconto racional, ao mesmo valor calculado pelo desconto comercial ou bancário.

Portanto temos:

$$D_r = \frac{Ni_f.n}{1+i_f.n}$$

$$D_c = Nin$$

Como, $D_r = D_c$

$$\frac{Ni_f.n}{1+i_f.n} = Nin$$

Então, $i_f = \dfrac{i}{1-in}$ **(20)**, onde i é a taxa de desconto aplicada.

Considerando o exemplo acima, temos:

$i = 0{,}40$ a.a ou $i = \dfrac{0,40}{12}$ a.m e $n = 3$ meses

$$i_f = \frac{i}{1-in}$$

$$i = \frac{\frac{0,40}{12}}{1-\frac{0,40}{12}x3}$$

$$i \cong 0,037a.m$$

$$i \cong 0,44a.a$$

Relação entre Desconto Racional e Comercial

Já demonstramos empiricamente, nos exemplos acima, que o desconto comercial é maior que o desconto racional, ou seja:

$$D_c > D_r$$

Como: $D_r = \dfrac{Nin}{1+in}$ e $D_c = Nin$

Relacionando os dois descontos, temos:

$$\frac{D_c}{D_r} = \frac{Nin}{\frac{Nin}{1+in}},$$

$$\frac{D_c}{D_r} = 1+in$$

$$\boxed{D_c = D_r(1+in)} \text{ (21)}$$

Com essa demonstração, podemos entender que o desconto comercial refere-se ao montante do desconto racional calculado para o mesmo período e à mesma taxa.

EXEMPLO 5

O Desconto Comercial de um título descontado 3 meses antes de seu vencimento a uma taxa de 40% a.a. é de R$ 550,00. Qual é o desconto racional?

$$D_c = D_r(1+in)$$

$$550 = D_r(1+\frac{0,40}{12}x3)$$

D_r =R$ 500,00

Conhecemos e utilizamos os descontos existentes no mercado financeiro, lembrando que os descontos que conhecemos são relacionados a regimes simples e são os mais utilizados pelas instituições financeiras, agora conheceremos os descontos indexados aos regimes compostos.

TÓPICO 2

Desconto racional composto

Objetivo

- Conhecer e diferenciar os descontos relacionados a regimes compostos

A sistemática utilizada para calcular o desconto racional composto é a mesma usada no desconto simples; a diferença está apenas no tipo do regime de juro.

Os descontos simples vemos com maior frequência em nosso dia a dia, já os descontos compostos são de pouca aplicabilidade. Iremos apresentar aquele que, conceitualmente existe no mercado, pois o desconto comercial é raramente utilizado em operações financeiras.

Assim como foi visto no desconto racional simples, no composto as expressões básicas adquirem forma semelhante as do regime de juros compostos:

De forma similar ao montante, em regime de juro composto, o Valor atual (Vr) terá a seguinte convenção: $V_r = \frac{N}{(1+i)^n}$, para o Desconto Total temos: $D_t = N - V_r$. Como $V_r = \frac{N}{(1+i)^n}$, temos a expressão:

$$\boxed{D_t = N\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right)} \quad \textbf{(22)}$$

EXEMPLO 6

Um título no valor de R$ 10.000,00 foi resgatado 6 meses antes do seu vencimento à taxa de 2% a.m. Qual o desconto racional composto aplicado e o valor líquido recebido?

Solução:

Temos: N= 10.000,00

i=2% a.m.

n=6 meses

a) Para o Desconto Composto:

$$D_t = N\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right)$$

$$D_t = 10.000\left(1 - \frac{1}{(1+0,02)^6}\right)$$

$D_t =$ R$ 1.120,29

b) Para o Valor Líquido Recebido temos:

$D_t = N - V_r$

1.120,29 =10.000 - V_r

$V_r =$ R$ 8.879,71

Agora que estudamos os modelos de descontos existentes em matemática financeira, sabemos das implicações relacionadas a resgates de títulos antes de seus vencimentos e como reagem as instituições financeiras.

Com isto vimos mais uma aula de nosso curso, posteriormente vamos conhecer equivalência de capitais e iniciaremos o conceito de anuidades e suas aplicações.

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1) Calcule o valor do desconto comercial simples e o valor descontado de um titulo de valor nominal de R$ 4.000,00, que vence em 1 ano, que está sendo liquidado 3 meses antes de seu vencimento, dado que a taxa de desconto é de 36% a.a.

2) Um título de valor nominal de R$ 25.893,00 foi descontado cinco meses antes do vencimento a uma taxa de 4,75% a.m. Qual o valor do desconto e o liquido recebido, considerando o desconto comercial por fora?

3) Um banco desconta, 72 dias antes do vencimento, um título com valor nominal de R$ 5.627,00 a taxa de 27% a.a. na capitalização simples. Qual o desconto por dentro obtido na transação financeira, lembrando que o ano comercial tem 360 dias?

4) Um título foi descontado em um banco que trabalha com uma taxa de desconto comercial simples de 2,5% a.m. Sabendo que o prazo da operação foi de 3 meses gerando um valor liquido de R$ 1.665,00. Pede-se o valor nominal do título.

5) Em que prazo um título de R$ 1.250,00, descontado por fora, a uma taxa de 4,5% a.m., dá R$ 450,00 de desconto?

6) Uma pessoa pretende saldar uma dívida, cujo valor nominal é de R$ 2.040,00, 4 meses antes de seu vencimento. Qual será o valor pago pelo título se a taxa racional simples utilizada é de 5% a.m.?

7) Igor descontou um título 2 meses antes do vencimento a uma taxa de 24% ao ano. O banco utilizou o desconto comercial na operação e descontou R$ 300,00 desse título. Nesse caso, seria melhor para Igor, financeiramente, se o banco utilizasse o desconto racional ou por dentro? Justifique sua resposta.

8) Um título no valor de R$ 15.000,00 foi resgatado 3 meses antes do seu vencimento a taxa de 2% a.m. Qual o desconto racional composto aplicado e o valor liquido recebido?

AULA 3

Equivalência de capitais e anuidades

Olá, aluno(a),

Na aula passada, estudamos o conceito de desconto, as modalidades e suas aplicações no mercado financeiro sobre títulos resgatados antecipadamente. Nesta aula, dois temas de grande importância na matemática comercial e financeira serão abordados.

O primeiro é chamado de equivalência de capitais e o seu conhecimento nos permitirá a transformação de uma forma de pagamento em outra financeiramente diferente, como também a possibilidade de identificar formas não-equivalentes, compará-las e escolher a melhor alternativa financeira. Com isso, vamos poder trabalhar com vários capitais ou prazos diferentes.

O segundo tema é o que chamamos de anuidades ou rendas certas ou mesmo fluxo de caixa, nele veremos sequências de pagamentos ou recebimentos sucessíveis em intervalos de tempo regulares ou não, como exemplos comuns podemos citar os aluguéis, prestações de consórcios, salários, poupanças, planos de financiamentos, dentre outros. É bom lembrar que todos se utilizam do fluxo de caixa para um melhor gerenciamento e consequente acompanhamento financeiro.

Sem dúvida, os conceitos aqui explicitados aliados aos exercícios praticados nesta aula servirão como uma boa base para o entendimento dos importantes temas que iremos estudar.

Então, uma excelente aula para você!

Objetivos

- Distinguir equivalência de capitais nas operações financeiras
- Reconhecer as características de conjunto de equivalência de capitais
- Aplicar noções de anuidades
- Entender a definição, aplicação e classificação de fluxo de caixa
- Utilizar Fluxo de caixa homogêneo e heterogêneo

TÓPICO 1

Conceito de equivalência de capitais

OBJETIVOS

- Distinguir equivalência de capitais nas operações financeiras
- Reconhecer as características de conjunto de equivalência de capitais

Nas operações financeiras, é comum a antecipação ou prorrogação de títulos, ou mesmo a substituição de um titulo por vários ou até a troca de um único titulo por muitos. Essas operações de troca envolvem comparações de valores e datas diferentes, a uma dada taxa de juros.

Em geral, essas operações são feitas utilizando-se o critério de juros compostos e, para que haja a substituição, faz-se necessário uma comparação ou equivalência dos diferentes títulos.

Para entendermos melhor o assunto abordado nesta aula é necessário o esclarecimento de alguns conceitos que serão usados na resolução dos problemas:

- **Data Focal**: é a data considerada como base de comparação dos valores referidos a datas diferentes, também chamada de data de avaliação ou *data de referência*;
- **Equação de Valor**: é a equação que possibilita realizar a igualdade de capitais diferentes, referidos a datas diferentes, para uma mesma data focal, fixada a uma certa taxa de juros.

O conceito de equivalência nos permite inserir uma data determinada entre zero e n, um valor financeiramente equivalente ao capital inicialmente aplicado (C) e ao montante a ser futuramente resgatado (S).

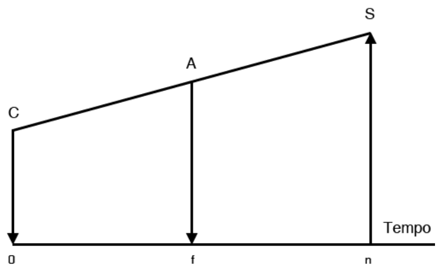


Figura 1 - Capital, valor atual e montante. MILONE, (2006, p.134)

Assim, como mostra a Figura 1, C é o capital investido, A é o seu valor na data focal f e S o montante em n. O valor encontrado, que se localiza entre zero e n, dá-se o nome de *valor atual*, entendendo-se *atual* como valor na data focal f.

Ainda conforme a Figura 1, o valor atual é uma variável financeiramente ligada ao capital investido e ao montante, pois em relação ao capital C, é uma espécie de montante e em relação ao montante S ele atua como ema espécie de valor atual

Utilizando a Equação de Valor, para as variáveis identificadas na Figura 1, podemos encontrar a igualdade de capitais diferentes (0 e n), à datas diferentes, para uma mesma data focal (f), fixada a uma certa taxa de juros (i).

Agora que conceituamos e destacamos as principais variáveis, vamos conhecer as fórmulas adotadas para a equivalência entre capitais.

1.1 CAPITAIS EQUIVALENTES

Dois ou mais capitais, com datas de vencimento determinadas, são equivalentes quando colocados para uma mesma data focal à mesma taxa de juros, tiver valores iguais em seus respectivos vencimentos.

Vejamos um conjunto de valores nominais e as respectivas datas de vencimento:

Capital	Data de Vencimento
C_1	1
C_2	2
C_3	3
. . .	. . .
C_n	n

Tabela 1 - Valores nominais

Adotando-se uma taxa de juros i, os capitais (C) serão equivalentes na data focal 0, tem-se:

$$\boxed{V = \frac{C_1}{(1+i)^1} = \frac{C_2}{(1+i)^2} = \frac{C_3}{(1+i)^3} = \ldots = \frac{C_n}{(1+i)^n}} \quad (23)$$

EXEMPLO

Admitindo uma taxa de juros de 5% a.m., os capitais de R$ 1.000,00 na data 2 e R$ 1.102,50 na data 4 são equivalentes?

SAIBA MAIS!

A equivalência de capitais a juros compostos goza da propriedade transitiva: se C_1 e C_2 são equivalentes a C_3, então eles são equivalentes entre si.

Solução

Adotando a fórmula dos Capitais Equivalentes, temos: $V = \frac{C_2}{(1+i)^2} = \frac{C_4}{(1+i)^4}$

$$V_2 = \frac{C_2}{(1+i)^2} = \frac{1.000}{(1+0,05)^2} = \$907,03$$

$$V_4 = \frac{C_4}{(1+i)^4} = \frac{1.102,50}{(1+0,05)^4} = \$907,03$$

Portanto, os dois capitais são equivalentes na data focal zero.

1.2 CONJUNTO EQUIVALENTES DE CAPITAIS

Suponhamos que uma pessoa tenha uma carteira de aplicações em títulos de renda fixa com várias datas de aplicações e com vencimentos diferentes. Esta carteira de valores nominais é denominada de **Conjunto de Capitais** e suas principais características ou informações relevantes para descobrirmos sua equivalência é o valor nominal do titulo e sua data de vencimento.

Assim como podemos determinar a Equivalência entre Capitais do mesmo conjunto, podemos saber se um Conjunto de Capitais tem equivalência ou não. Portanto, "diz-se que dois conjuntos são equivalentes quando, fixada uma data focal e a uma taxa de juros, os valores atuais dos dois conjuntos forem iguais" (MATHIAS, 2002, p. 163).

Dados dois conjuntos de valores nominais com seus prazos contados a partir da mesma data de origem, representaremos os conjuntos (1 e 2) na tabela a seguir:

1° Conjunto		**2° Conjunto**	
Capital	Data Vencimento	Capital	Data Vencimento
C_1	n_1	C'_1	n'_1
C_2	n_2	C'_2	n'_2
...	...	...	...
C_n	n_n	C'_n	n'_n

Tabela 2 - Conjuntos de Capitais

Considerando uma taxa de juros "i", os conjuntos são equivalentes quando, fixado uma data focal e uma taxa de juros, os seus valores atuais forem iguais, ou seja:

$$\frac{C_1}{(1+i)^{n1}}+\frac{C_2}{(1+i)^{n2}}+...+\frac{C_n}{(1+i)^{nn}}=\frac{C'_1}{(1+i)^{n'1}}+\frac{C'_2}{(1+i)^{n'2}}+...+\frac{C'_n}{(1+i)^{n'n}} \quad \textbf{(24)}$$

Exemplo

Verificar se os dois conjuntos a seguir são equivalentes à taxa de 10% a.a.

1º CONJUNTO

CAPITAL R$	VENCIMENTO (MÊS)
1.100,00	1
2.420,00	2
1.996,50	3
732,05	4

2º CONJUNTO

CAPITAL R$	VENCIMENTO (MÊS)
2.200,00	1
1.210,00	2
665,50	3
2.196,15	4

Solução

Para descobrirmos se os dois conjuntos acima são equivalentes, primeiramente, é necessário descobrir o valor de cada conjunto (1 e 2), utilizando a fórmula de Capitais Equivalentes (23).

Portanto, pelas tabelas dadas, podemos visualizar as variáveis utilizadas pela fórmula como sendo:

1º CONJUNTO

C	n
C_1 = 1.100,00	1
C_2 = 2.420,00	2
C_3 = 1.996,50	3
C_4 = 732,05	4

2º CONJUNTO

C	n
C_1 = 2.200,00	1
C_2 = 1.210,00	2
C_3 = 665,50	3
C_4 = 2.196,15	4

$$V_1=\frac{1.100}{(1+0{,}10)^1}+\frac{2.420}{(1+0{,}10)^2}+\frac{1.996{,}50}{(1+0{,}10)^3}+\frac{732{,}50}{(1+0{,}10)^4}=\$5.000{,}00$$

$$V_2 = \frac{2.200}{(1+0,10)^1} + \frac{1.210}{(1+0,10)^2} + \frac{665,50}{(1+0,10)^3} + \frac{2.196,15}{(1+0,10)^4} = \$5.000,00$$

Como $V_1 = V_2$, os dois conjuntos de capitais são equivalentes na data focal zero, à taxa de 10% a.a. Isso significa que uma pessoa ficará indiferente entre possuir uma carteira de títulos igual ao 1º ou ao 2º conjunto, desde que a taxa vigente seja de 10% a.a.

TÓPICO 2

Conceito de anuidades (ou rendas certas)

OBJETIVOS

- Aplicar noções de anuidades
- Entender a definição, aplicação e classificação de fluxo de caixa
- Utilizar fluxo de caixa homogêneo e heterogêneo

Nas aplicações financeiras, o capital aplicado pode ser pago ou recebido de uma só vez ou por sucessivos pagamentos ou recebimentos.

Os pagamentos ou recebimentos em aplicações são representados por ''uma série de depósitos ou prestações realizadas em diferentes períodos, com o objetivo de formar capital (capitalização) em uma data futura ou quitar uma dívida (amortização), há ainda o caso de pagamento pelo uso, sem que haja amortização, como em casos de aluguéis'' (MILONE, 2006, p. 145).

Esses casos apresentam a existência de Rendas ou Anuidades que é ''o conjunto de entradas (recebimentos) e/ou saídas (pagamentos) de recursos financeiros, distribuídos ao longo do tempo, em datas previamente estabelecidas'' (MILONE, 2006, p. 145). É o movimento do dinheiro no tempo.

VOCÊ SABIA?

Apesar da denominação ''Anuidades'', não há obrigação de os depósitos ou prestações terem prazos ou períodos anuais.

Como exemplo de anuidades, podemos citar os depósitos mensais realizados em determinada conta remunerada, com vistas a formar um investimento, ou o pagamento de prestações mensais na compra de um bem.

2.1. DEFINIÇÕES

Considerando uma dada série de capitais e suas respectivas datas de aporte:

Capitais	Datas
R_1	n_1
R_2	n_2
R_3	n_3
...	...
R_n	n_n

Esses capitais, referidos a uma dada taxa de juros "i" caracterizam uma anuidade ou renda certa, onde:

- VALORES: Termos da anuidade (prestações ou depósitos);
- PERÍODO: Intervalo de tempo entre dois termos;
- DURAÇÃO DA ANUIDADE: Soma dos períodos;
- VALOR ATUAL: Soma dos valores atuais dos seus termos em uma mesma data focal e à mesma taxa de juros "i";
- MONTANTE: Soma dos montantes dos seus termos, considerada uma taxa de juros "i" e uma data focal estabelecida.

2.2. TIPOS DE RENDAS (OU ANUIDADES)

- **Rendas certas ou determinísticas**: o tempo de duração dos pagamentos (ou depósitos) é pré-determinado, não dependendo de condições externas. Assim, o valor dos termos, prazo de duração e a taxa de juros são fixos e imutáveis (Ex: amortização de uma dívida com prazos bem definidos de início e término de pagamento, bem como com definição clara da taxa de juros e do valor das prestações). Tais tipos de renda são estudadas pela Matemática Financeira.
- **Rendas aleatórias ou probabilísticas**: os valores e/ou datas de pagamentos ou de recebimentos podem ser aleatórios e mutáveis (Ex: pagamento de planos de aposentadoria, seguros de vida). Rendas com essas características são estudadas pela Matemática Atuarial.

No quadro abaixo é possível observar a Classificação das Anuidades.

Quanto ao prazo	**Temporárias**: duração limitada. **Perpétuas**: duração ilimitada.
Quanto ao valor dos termos	**Constante**: todos os termos são iguais. **Variável**: os termos são diferentes entre si.
Quanto à forma de pagamento ou de recebimento	**Imediatas**: os termos são exigidos a partir do primeiro período. Postecipadas ou vencidas, se os termos são exigidos no fim dos períodos. Antecipadas, se os termos são exigidos no início dos períodos. **Diferidas**: os termos são exigidos a partir de uma data que não seja o primeiro período. Postecipadas ou vencidas, se os termos são exigidos no fim dos períodos. Antecipadas, se os termos são exigidos no início dos períodos.
Quanto à periodicidade dos pagamentos ou recebimentos	**Periódicas**: períodos iguais. **Não periódicas**: períodos diferentes entre si.

GUARDE BEM ISSO!

Representaremos os recebimentos/pagamentos de fluxos constantes pela letra "R"; e de fluxos variáveis por Cfj (j = 0, 1, 2, 3, ...).

Caro(a) aluno(a), com o objetivo de melhor estudarmos as formulações e as aplicações práticas das Anuidades, representadas pelo Fluxo de Caixa, trataremos o assunto em duas partes. Inicialmente, analisaremos os fluxos de caixa de valores constantes e, em seguida, os fluxos de valores variáveis.

EXEMPLOS

a) Fluxo de Caixa Constante, Série Uniforme ou Fluxo Homogêneo

Vamos representar um Fluxo de Caixa que nos mostra um empréstimo de R$ 100,00, pagos em 3 parcelas mensais de R$ 40,00:

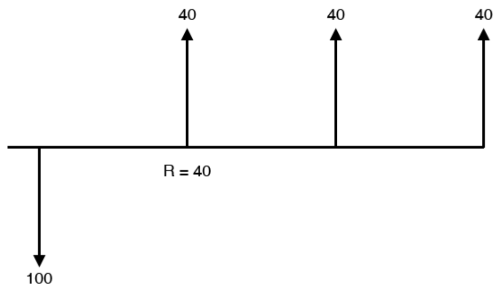


Figura 2 - Série Uniforme ou Fluxo Homogêneo

Sob a ótica do emprestador, neste fluxo estão representados:

- 3 períodos de tempo (3 meses);
- 1 fluxo de saída de recursos no valor de R$ 100,00;
- 3 fluxos de entradas de R$ 40,00

Sob a ótica do tomador do empréstimo, o mesmo fluxo representa:

- 3 períodos de tempo (3 meses);
- 1 fluxo de entrada de recursos no valor de R$ 100,00;
- 3 fluxos de saídas no valor de R$ 40,00

b) Fluxo de Caixa Variável ou Fluxo Heterogêneo

Agora, vamos representar um Fluxo de Caixa que nos mostra um empréstimo de R$ 100,00, pagos em 3 parcelas mensais, sendo a primeira de R$ 20,00, a segunda de R$ 60,00 e a terceira de R$ 40,00.

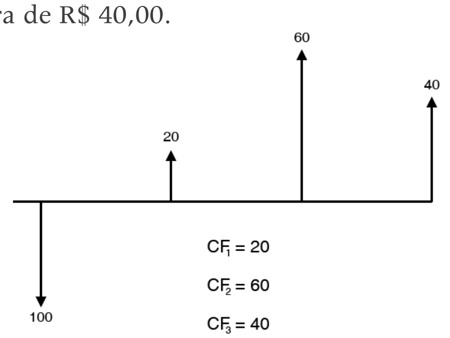


Figura 3 - Caixa Variável ou Fluxo Heterogêneo

Sob a ótica do emprestador, neste fluxo variável estão representados:

- 3 períodos de tempo (3 meses);
- 1 fluxo de saída de recursos no valor de R$ 100,00;
- 3 fluxos de entradas de R$ 20,00, R$ 60,00 e R$ 40,00, sendo CF1, CF2 e CF3 respectivamente.

Sob a ótica do tomador do empréstimo, o mesmo fluxo representa:

- 3 períodos de tempo (3 meses);
- 1 fluxo de entrada de recursos no valor de R$ 100,00;

• 3 fluxos de saídas no valor de R$ 20,00, R$ 60,00 e R$ 40,00, sendo CF1, CF2 e CF3 respectivamente .

Observamos que a seta para baixo no valor de R$ 100,00 pode representar entrada ou saída, dependendo da ótica de visão (emprestador e tomador do empréstimo). Portanto, não há uma convenção estabelecida quanto aos sentidos das setas representativas dos fluxos, mas devemos observar os sentidos que devem ser opostos em relação à linha do tempo, quanto à entrada e saída.

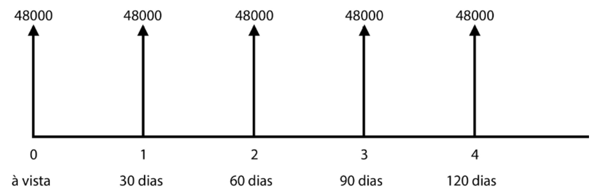
Vejamos, a seguir, aplicações de Fluxo de Caixa na avaliação de operações financeiras realizadas em nosso cotidiano.:

EXEMPLO

Uma imobiliária publica no jornal que está vendendo até o dia xx/yy um imóvel pelo valor de R$ 240.000,00. De acordo com os dois tipos de Planos de Pagamentos dados, vamos elaborar um fluxo de caixa e identificar se o mesmo corresponde ao modelo homogêneo ou heterogêneo de diagrama.

PLANO 1 Em cinco prestações iguais, mensais e sucessivas de R$ 48.000,00, sendo a primeira no ato da compra:

Solução

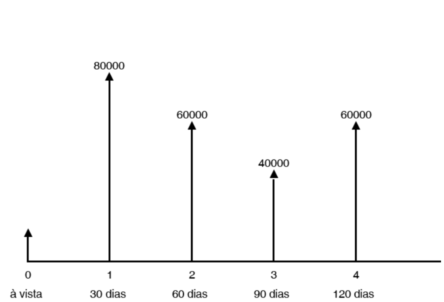


Representamos o pagamento por setas do mesmo tamanho, pois são valores iguais, distribuídas em 120 dias (4 meses). Portanto, trata-se de um Fluxo de Caixa Homogêneo, no período de pagamento de 4 meses, antecipada.

OBSERVAÇÃO: nesse caso, como o primeiro pagamento ocorre no início do primeiro período (momento 0), dizemos também que o fluxo é antecipado.

PLANO 2 Em quatro prestações, mensais e sucessivas, sendo a primeira de R$ 80.000,00, a segunda de R$ 60.000,00, a terceira de R$ 40.000,00 e a última de R$ 60.000,00, sem entrada:

Solução



Representamos o pagamento por setas de tamanhos variados, conforme valor do pagamento, distribuídas em 120 dias (4 meses). Portanto, trata-se de um Fluxo de Caixa Heterogêneo, no período de pagamento de 4 meses, postecipada.

OBSERVAÇÃO: como o primeiro pagamento só ocorre no final do primeiro período (momento 1), o diagrama acima é classificado como uma série postecipada.

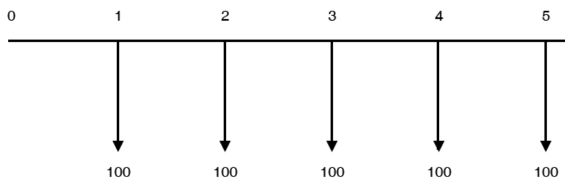
2.3 FLUXO DE CAIXA CONSTANTE (OU HOMOGÊNEO)

Prezado (a) aluno (a), neste item, estudaremos os fluxos de caixa uniformes, ou seja, fluxos com pagamentos ou recebimentos iguais ao longo do tempo. Para fixarmos melhor, suponhamos, inicialmente, a seguinte situação:

Vamos achar o montante ao final do 5º mês de uma sequência de depósitos mensais e sucessivos no valor de R$ 100,00 cada, numa conta investimento que remunera a uma taxa de juros de 10% ao mês.

Solução

Perfil Financeiro - Para ajudar na solução, primeiramente, vamos "montar" nosso fluxo de caixa.



Agora, vamos considerar cada depósito como um Valor Presente (P), devendo encontrar o seu Valor Futuro na data 5, usando a expressão de capitalização $S = P(1+i)^n$. Logo, temos:

$S_1 = 100x1,10^{5-1} = 100(1,1)^4 = 146,41$

$S_2 = 100x1,10^{4-1} = 100(1,1)^3 = 133,10$

$S_3 = 100x1,10^{3-1} = 100(1,1)^2 = 121,00$

$S_4 = 100x1,10^{2-1} = 100(1,1)^1 = 110,00$

$S_5 = 100x1,10^{1-1} = 100(1,1)^0 = 100,00$

Somando todos os termos, vem:

S1 + S2 + S3 + S4 + S5 = 146,41 + 133,10 + 121,00 + 110,00 + 100,00 = **610,51**

Portanto, o montante obtido ao final do 5º mês, após uma sequência de depósitos mensais e sucessivos no valor de R$ 100,00 cada, em uma determinada conta investimento, que remunera a uma taxa de juros de 10% ao mês, será de R$ 610,51.

Utilizando conceitos de Progressão Geométrica (PG), já que estamos trabalhando com Juros Compostos, podemos chegar a uma fórmula que torna simplificado o cálculo do montante ou valor futuro de uma série uniforme em uma data qualquer:

$$\boxed{S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}} \quad (25)$$

Substituindo no exemplo anterior temos:

$$S = 100\frac{(1+0{,}10)^5 - 1}{0{,}10} = \mathbf{610{,}51\ (A)}$$

Para o mesmo exemplo, suponha que, ao invés do montante, desejássemos calcular o valor presente dos pagamentos. Considerando cada depósito como um valor futuro (S), calculamos seu valor presente utilizando a fórmula que aprendemos na aula sobre juros compostos para calcular o principal P (fórmula 11): $P = \frac{S}{(1+i)^n}$

$$P_1 = \frac{100}{(1{,}10)^1} = 90{,}91 \qquad P_2 = \frac{100}{(1{,}10)^2} = 82{,}64 \qquad P_3 = \frac{100}{(1{,}10)^3} = 75{,}13$$

$$P_4 = \frac{100}{(1{,}10)^4} = 68{,}30 \qquad P_5 = \frac{100}{(1{,}10)^5} = 62{,}09$$

Logo,

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 90{,}91 + 82{,}64 + 75{,}13 + 68{,}30 + 62{,}09$$

$$P = 379{,}07$$

Podemos obter, também, através de ferramentas da PG, uma fórmula simplificada para o cálculo do Valor Presente de uma série uniforme de pagamentos.

$$P = R\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \quad (26)$$

No exemplo, temos:

$$P = 100\frac{(1+0{,}10)^5 - 1}{0{,}10(1+0{,}10)^5} = \mathbf{379{,}08\ (B)}$$

Veja que os valores calculados em (A) e (B), que encontramos em momentos distintos, são **financeiramente equivalentes**.

2.4 FLUXO DE CAIXA VARIÁVEL (OU HETEROGÊNEO)

Vimos que as séries uniformes possuem fluxos de pagamentos ou recebimentos com as seguintes características:

a) valores iguais;

b) valores sucessivos em períodos constantes.

Não sendo obedecidas pelo menos uma dessas características, teremos um Fluxo de Caixa variável ou série não uniforme.

Suponhamos que existam "n + 1" fluxos a partir da data zero, como segue:

Figura 4 - caixa variável (ou heterogêneo)

Como sabemos, a fórmula do montante em juros compostos é dada por: $S = P(1+i)^n$, deduzindo-se que $P = \frac{S}{(1+i)^n}$, ou seja, para levarmos um fluxo qualquer para a posição do seu sucessor imediato, basta que multipliquemos o valor do fluxo por $(1+i)^n$, "i" qualquer e "n" igual a 1, e assim sucessivamente, se quisermos ir para as próximas posições posteriores. De modo análogo, se quisermos retroceder um período, basta dividirmos o valor do fluxo por $(1+i)^n$.

De um modo geral, se desejarmos retroceder todos os fluxos da figura 6, para a data zero, obtendo, assim, o valor presente destes fluxos, utilizaremos a seguinte fórmula:

$$P = \frac{CF_0}{(1+i)^0} + \frac{CF_1}{(1+i)^1} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + \frac{CF_3}{(1+i)^3} + \ldots\ldots + \frac{CF_n}{(1+i)^n} \qquad (27)$$

EXEMPLO

Uma loja de automóveis está vendendo um carro por R$ 100.000 à vista ou em 3 parcelas mensais, da seguinte forma: R$ 60.000 no 1º mês, R$ 20.000 no 2º mês e R$ 38.500 no 3º mês. Considerando que a taxa de juros praticada no mercado é de 15% a.m., o que é melhor para o cliente: comprar à vista ou à prazo?

Para a resolução do problema, montaremos

ATENÇÃO!

O sinal negativo do Fluxo indicado no exemplo indica apenas que se trata de um fluxo contrário aos demais fluxos, ou seja, se os demais fluxos corresponderem a saída de dinheiro, o fluxo da data zero corresponderá a entrada de dinheiro e vice-versa.

primeiramente o fluxo de caixa.

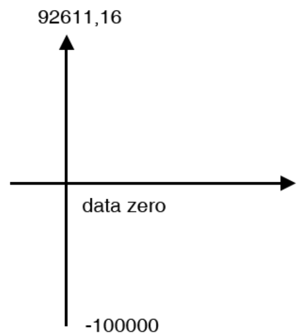
Para responder a pergunta acima, temos que "trazer" os valores das parcelas ao valor presente (data zero) dos fluxos das datas 1, 2 e 3, para que possamos comparar com o valor que seria pago à vista.

Usando a fórmula dada:

$$P = \frac{CF_0}{(1+i)^0} + \frac{CF_1}{(1+i)^1} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + \frac{CF_3}{(1+i)^3} + \ldots\ldots + \frac{CF_n}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{60.000}{(1+0{,}15)^1} + \frac{20.000}{(1+0{,}15)^2} + \frac{38.500}{(1+0{,}15)^3} = 92.611{,}16$$

Portanto, utilizando a taxa de 15% a.m., nosso fluxo se resume à seguinte forma:



-100000 + 92611,16 = -7388,84

Podemos chegar à seguinte conclusão: a melhor opção é comprar à prazo, pois, se o cliente possuir somente R$ 92.611,16 na data zero (menos do que os R$ 100.000 cobrados) e aplicar este dinheiro a uma taxa de 15% a.m., ele conseguirá pagar o computador.

A diferença entre os fluxos de entrada e saída de dinheiro em uma determinada data denominamos de valor presente líquido (VPL). Portanto, no exemplo anterior:

VPL = - 7.388,84 (na data zero).

Após esta terceira aula, sabemos distinguir e responder se os capitais ou conjunto de capitais são ou não equivalentes, daí a resposta se carteiras de investimentos distintas tem o mesmo retorno ou não. Também, nesta aula, aprendemos a "montar" um fluxo de caixa e extrair informações fundamentais sobre anuidades ou rendas certas.

Caro (a) aluno (a), sempre é importante lembrar a prática de vários exercícios para o aprofundamento das matérias vistas nesta aula.

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1) À taxa composta de 1,35% a.m., uma dívida de R$ 2.850,00 que vence daqui a sete meses vale quanto na data de hoje?

2) Um título no valor nominal de R$ 8.500,00, com vencimento para 5 meses, é trocado por outro de R$ 7.934,84, com vencimento para 3 meses. Sabendo-se que a taxa de juros praticada é de 3,5% a.m., pergunta-se se os capitais são equivalentes.

3) Paula vai casar e quer comprar um "kit" cozinha completo com geladeira, fogão, micro-ondas e armários projetados pelo preço de R$ 3.000,00 a vista, podendo optar pelo pagamento a prazo, sendo 2 prestações bimestrais iguais, não se exigindo a entrada. Qual será o valor dos pagamentos de Paula, se a taxa de juros considerada for de 8% a.b.?

4) Uma TV LED custa R$ 5.000,00 a vista, podendo ser financiada sema entrada em 10 prestações mensais à taxa de 3% ao mês. Qual será a prestação paga pelo comprador?

5) Um aparelho de som está sendo vendido nas seguintes condições: R$ 1.500,00 de entrada (no ato da compra) e três prestações mensais iguais de R$ 1.225,48. Sabendo que o juro utilizado na venda é de 2,5% a.m. Calcule o preço a vista do aparelho.

6) Uma loja de eletro-eletrônicos vende uma mercadoria à vista por R$ 10.000,00, ou em quatro prestações iguais nos seguintes prazos: 30, 90, 150 e 180 dias. Sabendo que a empresa cobra uma taxa de juros de 4% a.m., calcule o valor da prestação.

AULA 4 | Empréstimos bancários

Olá, aluno(a)

Os diagramas de fluxo de caixa utilizados na aula passada terão grande importância nesta quarta e última aula do nosso curso, pois possibilitarão uma melhor visualização dos fluxos de pagamentos relacionados a empréstimos bancários, tema a ser estudado nesta aula.

Quando uma pessoa pede um empréstimo, assume uma dívida que deverá ser quitada dentro de um prazo, a uma taxa de juros previamente determinada, ou seja, quem assume a dívida, obriga-se a pagar o principal mais os juros do período estipulado.

Vamos conhecer os principais sistemas de amortização de empréstimos e o que diferencia cada modalidade apresentada.

Esta aula nos trará uma noção de pagamentos de dívidas, assunto de destaque na matemática financeira comercial. Vamos aprender a construir uma planilha de acompanhamento do saldo devedor do empréstimo concedido e, por meio dela, conhecer a dinâmica de cada modelo.

Boa aula!

Objetivos

- Compreender os conceitos básicos de empréstimos bancários
- Conhecer e distinguir os principais sistemas de amortização de empréstimos bancários utilizados no mercado financeiro

TÓPICO 1

Conceitos básicos de empréstimos bancários

OBJETIVO

- Apresentação de conceitos e termos relacionados a Empréstimos Bancários

A dívida surge quando uma instituição financeira empresta para uma pessoa física ou jurídica um determinado valor, creditando-a por um prazo estipulado. Quem assume a dívida obriga-se a pagar o principal mais os juros devidos.

Nesta aula, vamos estudar os empréstimos adquiridos em longo prazo e os vários tipos de restituição do valor principal e juros. Geralmente os empréstimos têm suas condições estipuladas por contratos entre as partes envolvidas. As partes em questão são denominadas de credoras e devedoras.

Além disso, iremos analisar os modelos de sistema de reembolso ao principal, bem como o cálculo da taxa de juros efetivamente cobrada pelo credor ao devedor. Nos casos a serem estudados nesta quarta aula, vamos considerar apenas os regimes de *juros compostos*, pois os juros serão calculados sempre sobre o saldo devedor, portanto o não pagamento desses juros em um dado período levará a um saldo devedor maior, sendo calculado juro sobre juro, característica aplicada aos *juros compostos*.

Alguns termos utilizados neste tópico devem ser explicitados para facilitar a compreensão de conceitos utilizados posteriormente:

- **Credor**: Pessoa ou instituição que fornece o empréstimo;
- **Devedor**: Pessoa ou instituição que recebe o empréstimo;
- **Encargos Financeiros**: Custo da operação (juros) para o devedor e retorna para o credor;
- **Amortização**: Pagamento do principal (capital emprestado), geralmente através de parcelas periódicas;
- **Saldo Devedor**: Valor da dívida, em um determinado momento, após deduzido o valor já pago ao credor a título de amortização;
- **Prestação**: Composta pela soma do valor da amortização mais os encargos financeiros devidos em determinado momento;
- **Carência**: Diferimento no pagamento da primeira prestação. Pode ocorrer essa postergação apenas em relação ao principal, sendo os encargos pagos normalmente durante o período de carência;

Compreendidas essas noções iniciais, vamos passar agora os sistemas de amortização de empréstimos.

TÓPICO 2

Sistemas de amortização de empréstimos

Objetivos

- Conhecer e analisar as principais características dos Sistemas de Amortizações de Empréstimos Bancários
- Proceder a melhor decisão relacionada a empréstimos bancários tendo em vista as possibilidades oferecidas no mercado financeiro

Muitas vezes recorremos ao crédito para a compra de um bem que desejamos possuir, como a casa própria ou um equipamento para a empresa, por exemplo, e adquirimos prestações que serão pagas em longo prazo, ou seja, serão amortizadas, mediante pagamentos periódicos e sucessivos.

Os pagamentos realizados para a quitação da dívida devem ser planejados, para que o devedor proceda a liquidação progressiva de uma parcela de amortização, juntamente com a parcela dos juros que serão calculados sobre o saldo devedor.

Esse planejamento ou modelo escolhido para a liquidação de débitos referentes ao empréstimo concedido geram os Sistemas de Amortização, dos quais os principais utilizados por instituições bancárias brasileiras serão vistos nesta unidade.

2.1.1 Sistema de Amortização Constante (SAC)

VOCÊ SABIA?

O Sistema de Amortização Constante (SAC) é muito utilizado por pessoas para a compra da casa própria, pois a parcela diminui ao longo do período de pagamento.

No Sistema de Amortização Constante (SAC), o pagamento do saldo devedor caracteriza-se por parcelas em que as cotas de amortização do capital serão iguais e os juros sofrerão variações em cada unidade de tempo.

Como as parcelas de amortização serão iguais, o valor da amortização será obtido pela divisão do capital emprestado, que chamaremos de **PV** (Valor Presente), pelo número de prestações **(n)**. Outra característica interessante no modelo é que o saldo devedor é decrescente em progressão aritmética (PA), e será em função do valor constante da amortização.

Redução do saldo devedor = $\dfrac{PV}{n}$

Os juros, por incidirem sobre o saldo devedor a cada período, diminuem linearmente ao longo do tempo, em progressão aritmética (PA).

Redução dos juros = $\left(\dfrac{PV}{n}\right).i$ **(28)**

Fórmulas:

Amortização constante ⇒ $$Amort = \frac{PV}{n} \quad (29)$$

Saldo devedor numa data "t" ⇒ $$SD_t = \frac{PV}{n}(n-t) \quad (30)$$

Juros numa data "t" ⇒ $$J_t = SD_{t-1}\ x\ i$$

$$J_t = \frac{PV}{n}\left[n-(t-1)\right]xi$$

$$J_t = \frac{PV}{n}(n-t+1)xi \quad (31)$$

Prestação numa data "t" ⇒ $$PMT_t = Amort + J_t$$

$$PMT_t = \frac{PV}{n} + \frac{PV}{n}(n-t+i)xi$$

$$PMT_t = \frac{PV}{n}\left[1+(n-t+1)xi\right] \quad (32)$$

Vejamos como fica a planilha de pagamento do saldo devedor para esse tipo de Sistema de Amortização:

EXEMPLO

Suponha um empréstimo de R$10.000,00, realizado em uma instituição bancária pelo Sistema de Amortização Constante (SAC), cujo saldo devedor será pago em 4 (quatro) prestações anuais a uma taxa de juros de 10% ao ano.

Solução:

Valor do empréstimo: R$10.000,00

Número de prestações: 4 parcelas anuais

Taxa de juros: 10% ao ano

Primeiramente vamos calcular a Amortização que será constante: $Amort = \frac{PV}{n}$, então $Amort = \frac{10.000}{4} = 2.500$.

O juro deverá ser calculado para cada período, sendo que, para o primeiro ano, temos t=1 e assim sucessivamente para os demais períodos, onde:

$$J_t = \frac{PV}{n}(n - t + 1) \cdot i$$

$$J_1 = \frac{10.000}{4}(4 - 1 + 1) \cdot 0,10 = 1.000,00$$

$$J_2 = \frac{10.000}{4}(4 - 2 + 1) \cdot 0,10 = 750,00$$

$$J_3 = \frac{10.000}{4}(4 - 3 + 1) \cdot 0,10 = 500,00$$

$$J_4 = \frac{10.000}{4}(4 - 4 + 1) \cdot 0,10 = 250,00$$

Pagamento – Sistema de Amortização Constante (SAC)

PERÍODOS	SALDO DEVEDOR	AMORTIZAÇÃO	JUROS	PRESTAÇÃO
0	10.000,00	-	-	-
1	7.500,00	2.500,00	1.000,00	3.500,00
2	5.000,00	2.500,00	750,00	3.250,00
3	2.500,00	2.500,00	500,00	3.000,00
4	0,00	2.500,00	250,00	2.750,00
SOMA	-	10.000,00	2.500,00	12.500,00

Tabela 1– Pagamento de empréstimo realizado no Sistema de Amortização Constante (SAC)

Para o cálculo da parcela, podemos utilizar a fórmula da prestação ou mesmo somar as cotas de juros com as de amortização.

GUARDE BEM ISSO!

"Carência é o período em que determinada obrigação não é exigível do devedor." (MILONE, 2006, p. 11).

Existem tipos de empréstimos em que o credor concede dentro do Sistema de Amortização Constante, ou em outros modelos, um período de carência para o pagamento do principal, ou seja, é dado um prazo para que o primeiro pagamento seja realizado e consequentemente uma nova programação de recebimento da dívida, com situações diferenciadas, que conheceremos a seguir:

1. Empréstimos em que os juros são pagos durante o período de carência;
2. Empréstimos em que os juros são capitalizados durante o período de carência e pagos integralmente juntamente com a primeira amortização de principal;
3. Empréstimos em que os juros são capitalizados durante o período de carência e acrescidos ao saldo devedor, gerando amortizações de maior valor que são mantidas constantes.

EXEMPLO 1

Juros pagos durante o período de carência:

No primeiro exemplo, vamos simular um empréstimo bancário de R$10.000,00 pelo Sistema de Amortização Constante (SAC), cujo saldo devedor será pago em 6 (seis) parcelas com carência de 2 anos, 4 parcelas anuais após a carência concedida, à taxa de juros de 10% ao ano.

Solução:

- Valor do empréstimo: R$10.000,00
- Número de prestações: 6 parcelas anuais
- Período de carência: 2 anos
- Amortizações: 4 parcelas anuais, após a carência
- Taxa de juros: 10% ao ano

Para auxiliar na construção da planilha financeira de pagamentos, podemos montar um fluxo de caixa, onde PV será o principal e pagaremos apenas os juros nos 2 primeiros anos de carência (J_1 e J_2) e, a partir do terceiro ano, realizaremos o pagamento das Amortizações somadas aos juros de cada período.

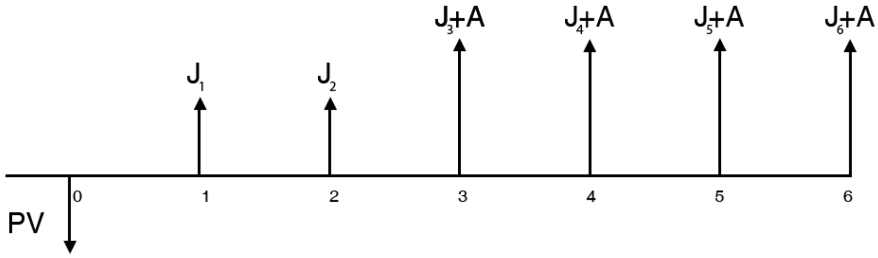


Figura 1 - Fluxo de caixa no Sistema de Amortização Constante (SAC) com juros pagos durante a carência

Pagamento – SAC com carência de 02 anos - Juros pagos durante a carência

PERÍODOS	SALDO DEVEDOR	AMORTIZAÇÃO	JUROS	PRESTAÇÃO
0	10.000,00	-	-	-
1	10.000,00	-	1.000,00	1.000,00
2	10.000,00	-	1.000,00	1.000,00
3	7.500,00	2.500,00	1.000,00	3.500,00
4	5.000,00	2.500,00	750,00	3.250,00
5	2.500,00	2.500,00	500,00	3.000,00
6	0,00	2.500,00	250,00	2.750,00
SOMA	-	10.000,00	4.500,00	14.500,00

Tabela 2 - Pagamento de empréstimo realizado no Sistema de Amortização Constante (SAC) com período de carência e juros pagos durante a carência

Note que, nos dois primeiros anos, são pagos apenas os juros que incidem sobre o principal; após o terceiro ano, o pagamento é realizado da mesma forma que no período sem carência. Observe o fluxo de pagamentos dos juros no diagrama abaixo:

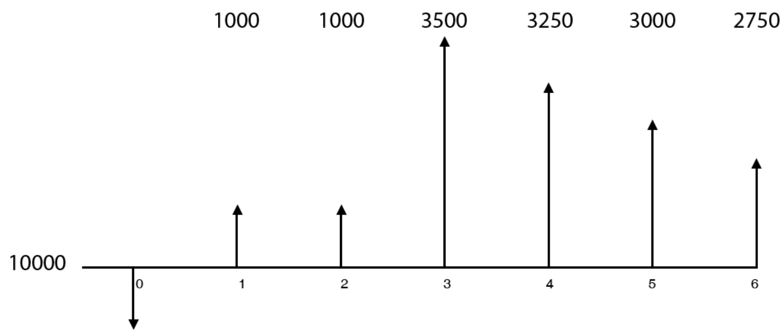


Figura 2 - Fluxo de pagamento das prestações com os juros pagos durante a carência

EXEMPLO 2

Juros capitalizados e pagos junto com a primeira amortização:

No segundo exemplo, vamos simular o mesmo empréstimo bancário de R$10.000,00 pelo Sistema de Amortização Constante (SAC), cujo saldo devedor será pago em 6 (seis) parcelas com carência de 2 anos e juros capitalizados e pagos junto com a primeira amortização, à taxa de 10% ao ano.

Solução

- Valor do empréstimo: R$10.000,00
- Número de prestações: 4 parcelas anuais, após a carência
- Período de carência: 2 anos
- Amortizações: 4 parcelas anuais, após a carência
- Taxa de juros: 10% ao ano

Em nosso fluxo de caixa, não existirá parcela de pagamento nos dois primeiros anos, mas os juros do período serão capitalizados e pagos juntamente com os juros do terceiro ano (J1+J2+J3), que serão somados à amortização aplicada no período; a partir do quarto ano, os juros são incorporados normalmente às amortizações.

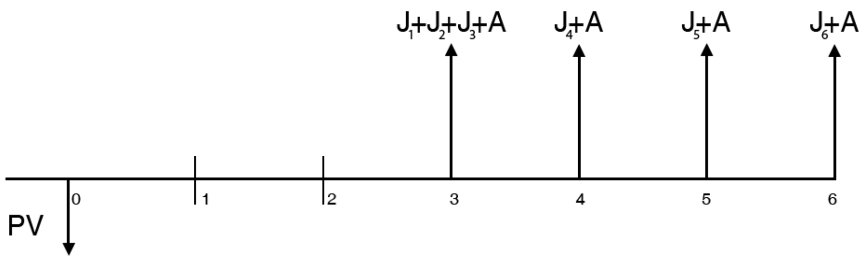


Figura 3 - Fluxo de caixa com no Sistema de Amortização Constante (SAC) com juros pagos na primeira amortização

PAGAMENTO - SAC COM CARÊNCIA DE 02 ANOS

JUROS CAPITALIZADOS E PAGOS NA PRIMEIRA AMORTIZAÇÃO

PERÍODOS	SALDO DEVEDOR	AMORTIZAÇÃO	JUROS	PRESTAÇÃO
0	10.000,00	-	-	-
1	11.000,00	-	-	-
2	12.100,00	-	-	-
3	7.500,00	2.500,00	3.310,00	5.810,00
4	5.000,00	2.500,00	750,00	3.250,00
5	2.500,00	2.500,00	500,00	3.000,00
6	0,00	2.500,00	250,00	2.750,00
SOMA	-	10.000,00	4.810,00	14.810,00

Tabela 3 - Pagamento de empréstimo realizado no Sistema de Amortização Constante (SAC) com período de carência e juros pagos na primeira amortização

Nesse caso, os juros acumulados no valor de R$3.310,00 serão pagos no terceiro ano, após a carência, daí a primeira prestação ser bem maior; a partir do terceiro ano, o fluxo financeiro normaliza-se:

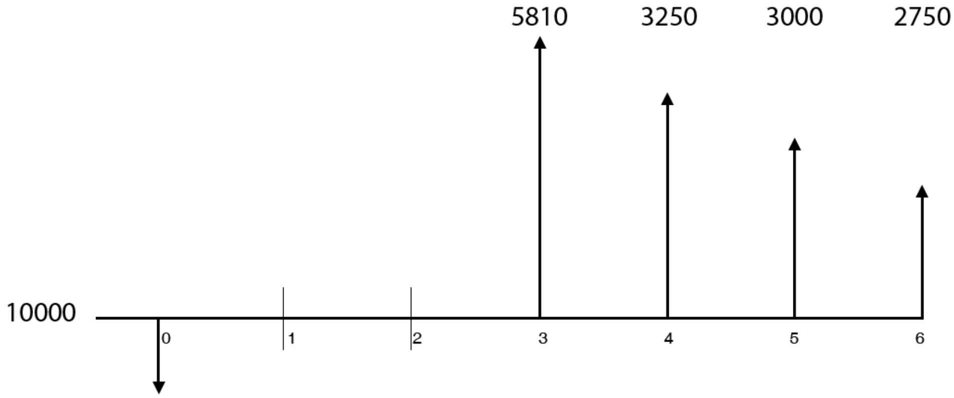


Figura 4 - Fluxo de pagamento das prestações com juros capitalizados e pagos com a primeira amortização

EXEMPLO 3

Juros da carência capitalizados e acrescidos ao saldo devedor:

No terceiro exemplo, vamos simular o mesmo empréstimo das situações acima, com os juros capitalizados durante o período de carência e acrescidos ao saldo devedor, gerando amortizações de maior valor, e com manutenção da taxa de 10% ao ano.

Solução

- Valor do empréstimo: R$10.000,00
- Número de prestações: 4 parcelas anuais, após a carência
- Período de carência: 2 anos
- Amortizações: 4 parcelas anuais, após a carência
- Taxa de juros: 10% ao ano

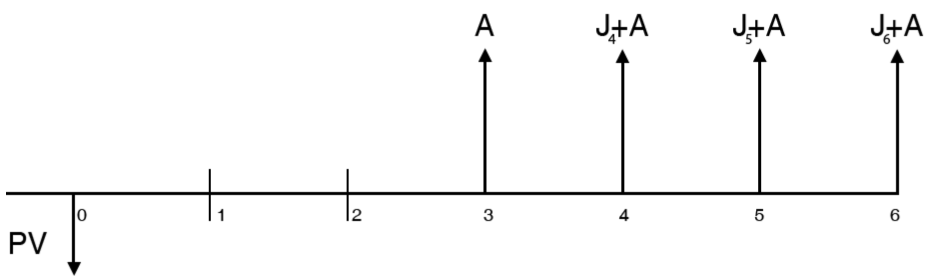


Figura 5 - Fluxo de caixa no Sistema de Amortização Constante (SAC) com juros acrescidos ao saldo devedor

Diferentemente das situações anteriores, os juros serão incorporados ao saldo devedor e a cota de amortização terá um valor maior (permanecendo constante).

Devemos, então, utilizar a seguinte fórmula para encontrar o novo valor da amortização:

$$A = \frac{PV(1+i)^3}{4} \quad (33)$$

Onde:

A: Amortização;

i: taxa de juros;

3: período da primeira amortização;

4: número de amortizações.

Pagamento – SAC com carência de 02 anos

Juros da carência capitalizados e acrescidos ao saldo devedor

PERÍODOS	SALDO DEVEDOR	AMORTIZAÇÃO	JUROS	PRESTAÇÃO
0	10.000,00	-	-	-
1	11.000,00	-	-	-
2	12.100,00	-	-	-
3	9.982,50	3.327,50	-	3.327,50
4	6.655,00	3.327,50	998,25	4.325,75
5	3.327,50	3.327,50	665,50	3.993,00
6	0,00	3.327,50	332,75	3.660,25
SOMA	-	13.310,00	1.996,50	15.306,50

Tabela 4 - Pagamento de empréstimo realizado no Sistema de Amortização Constante (SAC) com período de carência e juros capitalizados e acrescidos ao saldo devedor

Nessa terceira situação, o valor da amortização será maior devido aos juros incorporados no período de carência, daí o não pagamento dos juros no terceiro ano. O nosso fluxo financeiro forma-se com a segunda prestação paga no quarto ano maior que as demais.

Note que a primeira prestação terá o valor igual ao da cota de amortização pelo não pagamento de juros deste período; a partir do quarto ano a prestação será maior e decrescente.

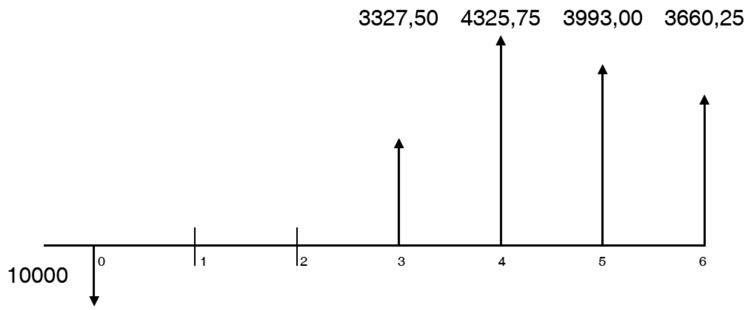


Figura 6 - Fluxo de pagamento das prestações com juros da carência capitalizados e acrescidos ao saldo devedor

2.1.2 Sistema Francês de Amortização

O Sistema Francês de Amortização caracteriza-se pelo fato de as prestações serem constantes, em termos nominais, ou seja, o tomador de empréstimo paga, durante toda vida do financiamento, a mesma prestação a qual inclui amortização de principal e juros e a dívida fica completamente saldada na última prestação.

SAIBA MAIS!

O nome Sistema de Amortização Francês deve-se ao fato de ter sido utilizado pela primeira vez na França, no século XIX.

Fonte: http://doletas.blogspot.com/2008/06/sistema-de-amortizao.html

Os juros são decrescentes ao longo do financiamento, pois incidem sobre saldos devedores menores; já as amortizações de principal evoluem sob a forma de uma curva crescente, começando com um valor baixo e crescendo progressivamente.

O Sistema Francês é usado principalmente em: Financiamentos Imobiliários, Crédito Direto ao Consumidor e Empréstimos a Pessoas Físicas.

Fórmulas Utilizadas no Sistema de Amortização Francês

Para encontramos o **valor da prestação** (PMT), devemos aplicar a fórmula do valor presente (PV), do modelo básico de anuidades, onde: $PV = PMTx\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ **(34)**. Isolando PMT, temos: $PMT = \frac{PV}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$ OU $PMT = PV \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$.

A **amortização** não é linear como no período anterior; no modelo francês a amortização é exponencial à razão de $(1+i)$, dada uma data genérica t, onde: $Amort_t = Amort_1 x(1+i)^{t-1}$ **(35)**.

Calculamos o **Saldo Devedor** para cada período, pela diferença entre o valor no início do período e amortização realizada, portanto o Saldo Devedor, numa data genérica t, é determinado por : $SD_t = PMT\frac{1-(1+i)^{-(n-t)}}{i}$ **(36)**,

Onde: n = número total de prestações e (n-t) = número de prestações a vencer.

Os **Juros** no Sistema Francês incidem sobre o saldo devedor apurado no início de cada período (ou final do período anterior), a uma data genérica t. Portanto temos:

$$J_t = SD_{t-1} xi$$
$$J_t = PMT - Amort_t$$
$$J_t = PMT - Amort_1(1+i)^{t-1}$$

$$Amort_1 = PMT - J_1$$

$$Amort_1 = PMT - (PVxi)$$

Então: $J_t = PMT - (PMT - PVxi)(1+i)^{t-1}$ **(37)**

No diagrama mostrado na Figura 7, temos a caracterização dos componentes juros, amortização e prestação no sistema francês, onde formam-se juros decrescentes, amortizações crescentes e pagamento de prestações constantes em 4 períodos de tempo.

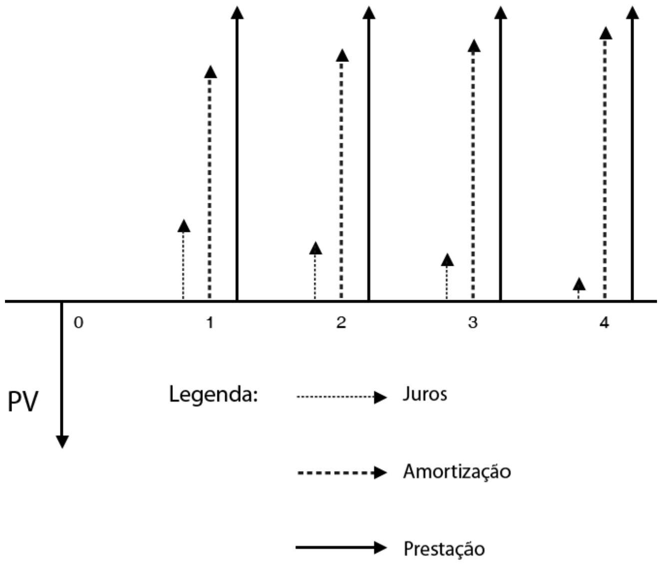


Figura 7 - Fluxo de pagamentos do Sistema de Amortização Francês (SAF)

EXEMPLO

Suponha o mesmo exemplo utilizado no Sistema de Amortização Constante (SAC), onde um empréstimo de R$10.000,00 realizado em uma instituição bancária, agora pelo Sistema Francês, terá o saldo devedor pago em 4 (quatro) prestações anuais a uma taxa de juros de 10% ao ano.

Solução

Valor do empréstimo: R$10.000,00

Número de prestações: 4 parcelas anuais

Taxa de juros: 10% ao ano

Sistema de Amortização Francês (SAF)

PERÍODOS	SALDO DEVEDOR	AMORTIZAÇÃO	JUROS	PRESTAÇÃO
0	10.000,00	-	-	-
1	7.845,29	2.154,71	1.000,00	3.154,71
2	5.475,11	2.370,18	784,53	3.154,71
3	2.867,91	2.607,20	547,51	3.154,71
4	0,00	2.867,91	286,80	3.154,71
SOMA	-	10.000,00	2.618,84	12.618,84

Tabela 5 - Pagamento de empréstimo realizado no Sistema Francês

Para a montagem da planilha acima, é necessário descobrir, através da fórmula da prestação (PMT), o valor que pagaremos pela prestação referente ao empréstimo do exemplo dado; como as prestações são constantes, é o mesmo valor para todas as outras do sistema. Depois calculamos os juros, através da fórmula dos juros ou simplesmente aplicando a taxa de juros ao saldo devedor do período anterior. A amortização pode ser calculada também pela fórmula ou como achamos prestação e juros, pela simples subtração dos termos.

O Sistema Price (lê-se praice) é o mesmo Sistema Francês, com as seguintes características:

- É uma variante do Sistema de Amortização Francês (SAF);
- Usa a taxa proporcional simples (taxa nominal) e não a taxa equivalente composta;
- Em geral o período das prestações (mensal) é menor que o da taxa de juros (anual);
- Se o período de amortização coincidir com o da taxa nominal, esta será a própria taxa efetiva e os valores do plano pela Tabela Price serão iguais aos apurados pelo Sistema de Amortização Francês (SAF).

2.1.3 Sistema de Amortização Americano (SAA)

O Sistema Americano é pouco utilizado no Brasil, mas de grande aplicabilidade no âmbito internacional. Nesse sistema, pagam-se apenas os juros, e o principal é devolvido (pago) ao final do empréstimo, de uma só vez. Dessa forma não são previstas amortizações intermediárias durante o prazo de empréstimo e geralmente os juros são pagos ao final de cada período, como mostra o diagrama de fluxo de caixa abaixo:

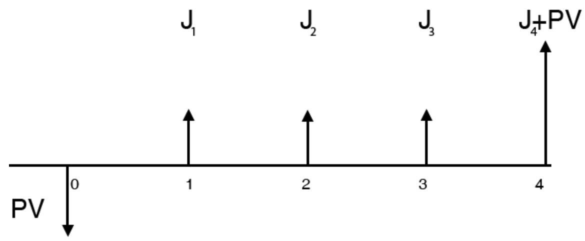


Figura 8 - Fluxo de pagamentos do Sistema de Amortização Americano (SAA)

Portanto, pagamos apenas os juros periodicamente, e o capital emprestado é devolvido no final, de uma só vez, juntamente com os juros devidos do último período.

EXEMPLO

Ainda no mesmo exemplo utilizado nos Sistema de Amortização Constante (SAC) e Francês (SAF), um empréstimo de R$10.000,00 realizado em uma instituição bancária, pelo Sistema de Amortização Americano (SAA) terá o saldo devedor pago em 4 (quatro) prestações anuais a uma taxa de juros de 10% ao ano.

Solução

- Valor do empréstimo: R$10.000,00
- Número de prestações: 1 parcela ao final do prazo do empréstimo
- Pagamento de juros: 4 parcelas anuais
- Taxa de juros: 10% ao ano

Sistema de Amortização Americano (SAA)

PERÍODOS	SALDO DEVEDOR	AMORTIZAÇÃO	JUROS	PRESTAÇÃO
0	10.000,00	-	-	-
1	10.000,00	-	1.000,00	1.000,00
2	10.000,00	-	1.000,00	1.000,00
3	10.000,00	-	1.000,00	1.000,00
4	0,00	10.000,00	1.000,00	11.000,00
SOMA	-	10.000,00	4.000,00	14.000,00

Tabela 6 - Pagamento de empréstimo realizado no Sistema de Amortização Americano

Nos três primeiros períodos, calculamos apenas os juros do saldo devedor pela fórmula de juros compostos, período a período; no último período, pagamos a amortização através do principal emprestado, mais os juros do período. Trata-se de um sistema de fácil operacionalidade, mas com poucas aplicações no sistema financeiro brasileiro.

Nesta aula, estudamos os modelos básicos de amortização mais utilizados no mercado financeiro. Todos devem ter observado que os exemplos apresentados tinham o mesmo prazo, a mesma taxa de juros, o mesmo capital emprestado, mas a soma dos valores efetivamente pagos diferenciava-se nos diversos modelos, embora fossem equivalentes.

Agora você, aluno, tem condições de fazer uma análise mais criteriosa quando pedir um empréstimo financeiro, e assim poder avaliar qual será o mais vantajoso e qual o mais dispendioso. São essas informações que deverão ser extraídas para que possamos realizar a melhor escolha financeira e ter sucesso nos negócios.

Chegamos, assim, ao final de nossa disciplina. Espero que os conceitos e práticas aqui abordadas sejam de grande valia na sua caminhada profissional e/ou na sua formação financeira.

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1) Foi adquirido um financiamento imobiliário de R$ 100.000,00, com juros a 7% a.a. e prazo de 5 anos. Sabendo que o modelo utilizado foi postecipado e sucessivo pede-se:

a. Planilha no Sistema de Amortização Constante – SAC;

b. Planilha no Sistema de Amortização Francês ou Price;

c. Planilha no Sistema Americano.

d. Para o tomador do empréstimo qual a melhor opção de amortização, justifique.

2) Guilherme está montando uma loja de artigos esportivos e vai a uma agencia bancária pedir um empréstimo de R$ 60.000,00, com as seguintes características financeiras:

- Prestações: 5 parcelas anuais;
- Período de carência: 2 anos;
- Amortização: 3 parcelas anuais, após a carência;
- Taxa de juros: 12% ao ano.

Construa uma Planilha SAC, com juros capitalizados durante o período de carência e pagos integralmente juntamente com a primeira amortização do principal;

REFERÊNCIAS

FARO, C. **Matemática Financeira**. São Paulo: Atlas, 1997.

MATHIAS, W.F; GOMES, J.M. **Matemática Financeira**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

MILONE, Giuseppe. **Matemática Financeira** – São Paulo: Thomson Learning, 2006.

NEVES, Cesar das. **Análise de Investimentos**. São Paulo, SP: Zahar, 1982.

SÁ, Ilídio Pereira de. **Curso Básico de Matemática Comercial e Financeira** – Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2008.

CURRÍCULO

Fabiano Porto de Aguiar

Professor Fabiano Porto de Aguiar é graduado em Ciências Econômicas pela Universidade Federal do Ceará – UFC; com especialização em Gestão Comercial pela Universidade de Fortaleza – UNIFOR. Atua na área comercial há sete anos e atualmente é gerente comercial de uma empresa privada que atua no mercado imobiliário. Concluiu o Curso de Professor Formador em Educação a Distância, promovido pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, onde atualmente é professor formador da disciplina de Matemática Comercial e Financeira.