



UFRR

PET ENGENHARIA CIVIL - UFRR

CURSO DE PRÉ-CÁLCULO



REITOR

Jefferson Fernandes do Nascimento

VICE-REITOR

Américo Alves de Lyra Júnior

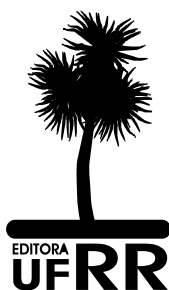
EDITORA DA UFRR

Diretor da EDUFRR

Cezário Paulino B. de Queiroz

CONSELHO EDITORIAL

Alcir Gursen de Miranda
Anderson dos Santos Paiva
Bianca Jorge Sequeira Costa
Edlauva Oliveira dos Santos
Georgia Patrícia F. da Silva
Guido Nunes Lopes
José Ivanildo de Lima
José Manuel Flores Lopes
Luiz Felipe Paes de Almeida
Luiza Câmara Beserra Neta
Núbia Abrantes Gomes
Rafael Assumpção Rocha
Rileuda de Sena Rebouças



Editora da Universidade Federal de Roraima
Campus do Paricarana - Av. Cap. Ene Garcez, 2413,
Aeroporto - CEP.: 69.310-000. Boa Vista - RR - Brasil
e-mail: editora@ufr.br / editoraufrr@gmail.com
Fone: + 55 95 3621 3111

A Editora da UFRR é filiada à:



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA

PET ENGENHARIA CIVIL – UFRR



CURSO DE PRÉ-CÁLCULO

Organizadores

Adriano Frutuoso da Silva
Camila Helena Menezes de Oliveira
César Gabriel Soares Viana de Brito
Danielle Yumi Mizuno
Eliehana de Almeida Peres
Felipe Augusto de Oliveira Almeida
Gustavo Oliveira Cardoso
Mesaque Vilmar Silvestre Viegas
Paula Jordana Sampaio de Sales
Paulo Sérgio Cardoso Ferreira
Rones de Souza Santos
Taina Lima Scherpel
Thiago Bessa Ramos
Veber Douglas Oliveira da Costa
Vinícius Ferreira Esbell



EDUFRR
Boa Vista - RR
2019

Copyright © 2019
Editora da Universidade Federal de Roraima

Todos os direitos reservados ao autor, na forma da Lei.
A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação dos direitos autorais (Lei n. 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Revisão Técnica

Erivaldo Diniz de Lima

Produção de texto

Grupo PET Engenharia Civil

Projeto Gráfico

Bruna Martelli

Diagramação

Bruna Martelli

Otávio Coelho

Capa

Otávio Coelho

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

C977 Curso de pré -cálculo / Grupo PET-Engenharia Civil; Adriano Frutuoso da Silva, tutor; Camila Hena Menezes de Oliveira ... [et al.], organizadores;. - Boa Vista : Editora da UFRR, 2019.

110 p.: il.

ISBN: 978858288-232-0

1 - Matemática. 2 - Cálculo. 3 - Álgebra. I - Título. II - grupo PET - Engenharia Civil. III - Adriano frutuoso da IV - Oliveira, Camila Helena Menezes de V - Universidade Federal de Roraima

CDU - 517

Ficha Catalográfica elaborada pela: Bibliotecária/Documentalista:
Shirdoill Batalha de Souza - CRB-11/573

A exatidão das informações, conceitos e opiniões é
de exclusiva responsabilidade dos autores

Autores

PET ENGENHARIA CIVIL

Tutor

Prof. Dr. Adriano Frutuoso da Silva

Petianos

Camila Helena Menezes de Oliveira

César Gabriel Soares Viana de Brito

Danielle Yumi Mizuno

Eliohana de Almeida Peres

Felipe Augusto de Oliveira Almeida

Paula Jordana Sampaio de Sales

Paulo Sérgio Cardoso Ferreira

Rones de Souza Santos

Taina Lima Scherpel

Thiago Bessa Ramos

Veber Douglas Oliveira da Costa

Vinícius Ferreira Esbell

Projeto Gráfico e Diagramação

Bruna Martelli

Produção de texto

Grupo PET Engenharia Civil UFRR

Revisão Técnica

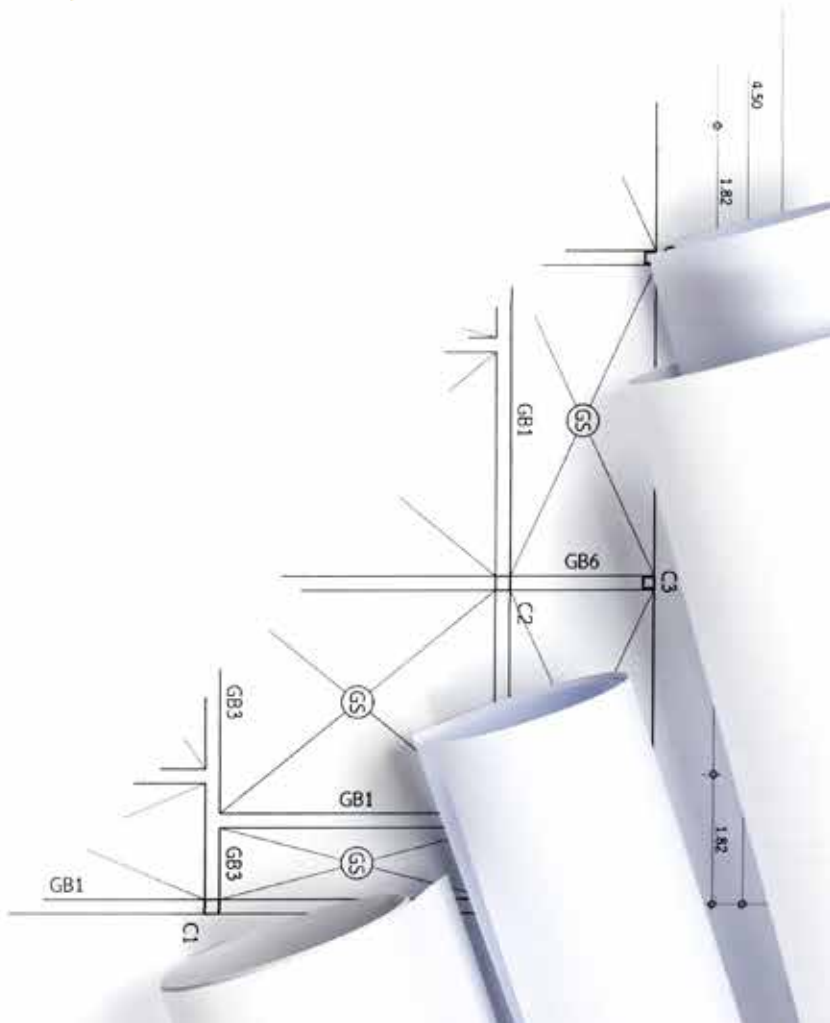
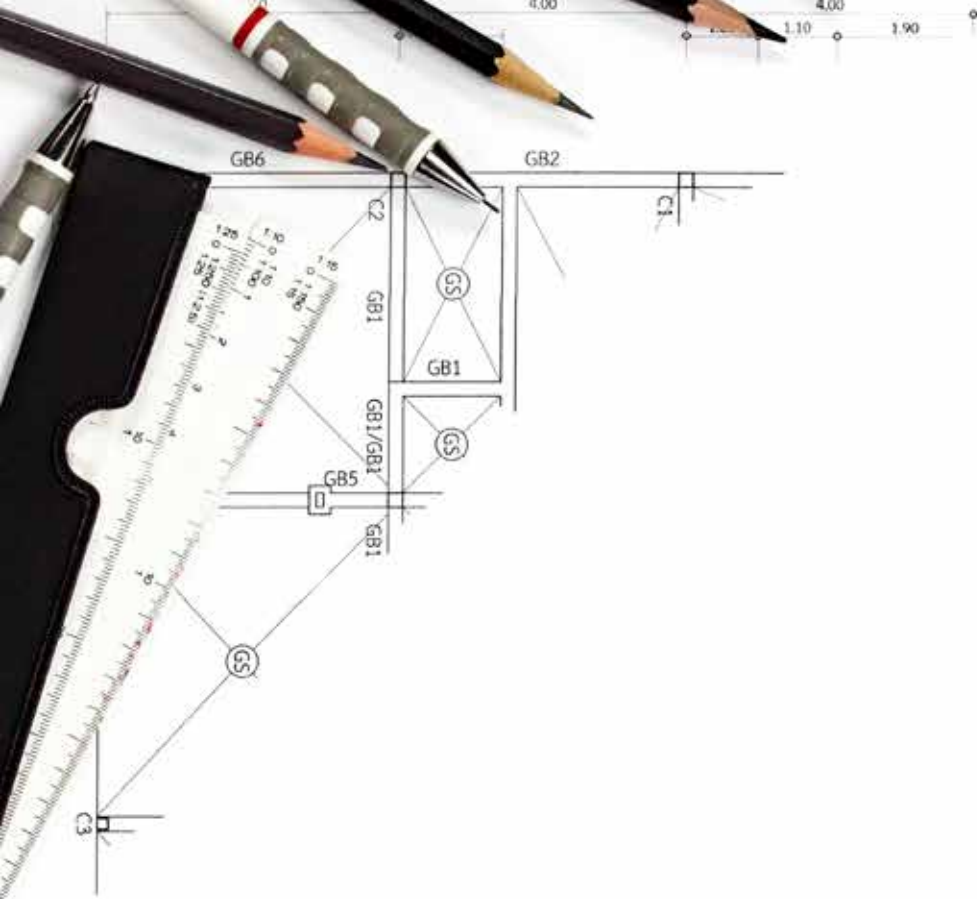
Prof. Me. Erivaldo Diniz de Lima

Sumário

PREFÁCIO	12
1 CONJUNTOS	14
1.1 OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS	15
1.1.1 REUNIÃO OU UNIÃO DE CONJUNTOS	15
1.1.2 INTERSEÇÃO DE CONJUNTOS	15
1.1.3 PROPRIEDADES DA UNIÃO E DA INTERSEÇÃO	15
1.1.4 DIFERENÇA ENTRE CONJUNTOS	16
1.1.5 NÚMERO DE ELEMENTOS DA UNIÃO DE CONJUNTOS	16
1.2 CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS	16
1.3 CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS	17
1.3.1 CONJUNTO DOS NÚMEROS PARES E ÍMPARES	17
1.4 CONJUNTO DOS RACIONAIS	17
1.5 CONJUNTO DOS IRRACIONAIS	18
1.6 CONJUNTO DOS REAIS.....	18
1.7 CONJUNTO DOS COMPLEXOS	19
1.8 INTERVALOS REAIS	19
EXERCÍCIOS.....	21
2 RELAÇÕES E FUNÇÕES	23
2.1 CONCEITOS BÁSICOS	23
2.1.1 DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E CONJUNTO IMAGEM	23
2.1.2 FUNÇÃO PAR E FUNÇÃO ÍMPAR.....	23
2.1.3 FUNÇÕES INJETIVAS, SOBREJETIVAS E BIJETIVAS	25
2.2 TIPOS DE FUNÇÕES	26
2.2.1 FUNÇÃO INVERSA.....	26
2.2.2 FUNÇÃO EXPONENCIAL	27
2.2.3 LOGARITMO E FUNÇÃO LOGARÍTMICA	30
2.2.3.1 CONSEQUÊNCIAS DA DEFINIÇÃO DE LOGARITMO	30
2.2.3.2 PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DOS LOGARITMOS	31
2.2.3.3 MUDANÇA DE BASE	32
2.2.3.4 COLOGARITMO	32
2.2.3.5 FUNÇÃO LOGARÍTMICA	32
2.2.3.6 GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA.....	33
2.2.3.7 LOGARITMO NATURAL	34
2.2.4 FUNÇÃO MODULAR	34
2.2.4.1 GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO MODULAR	34

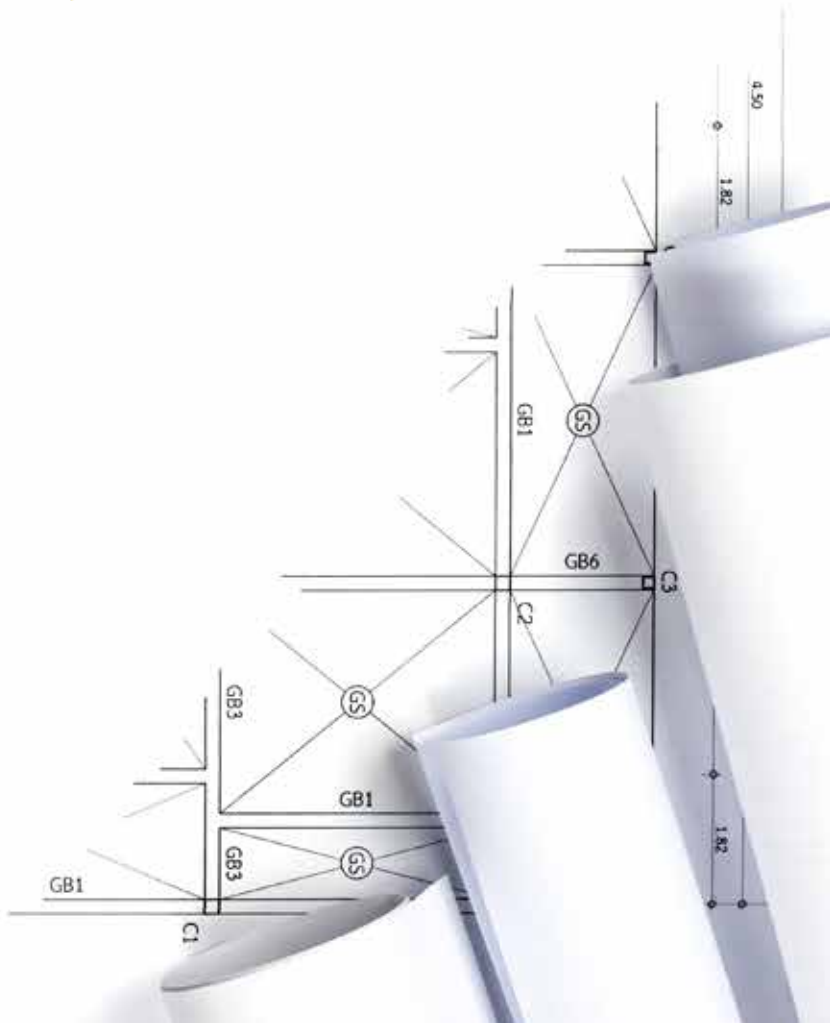
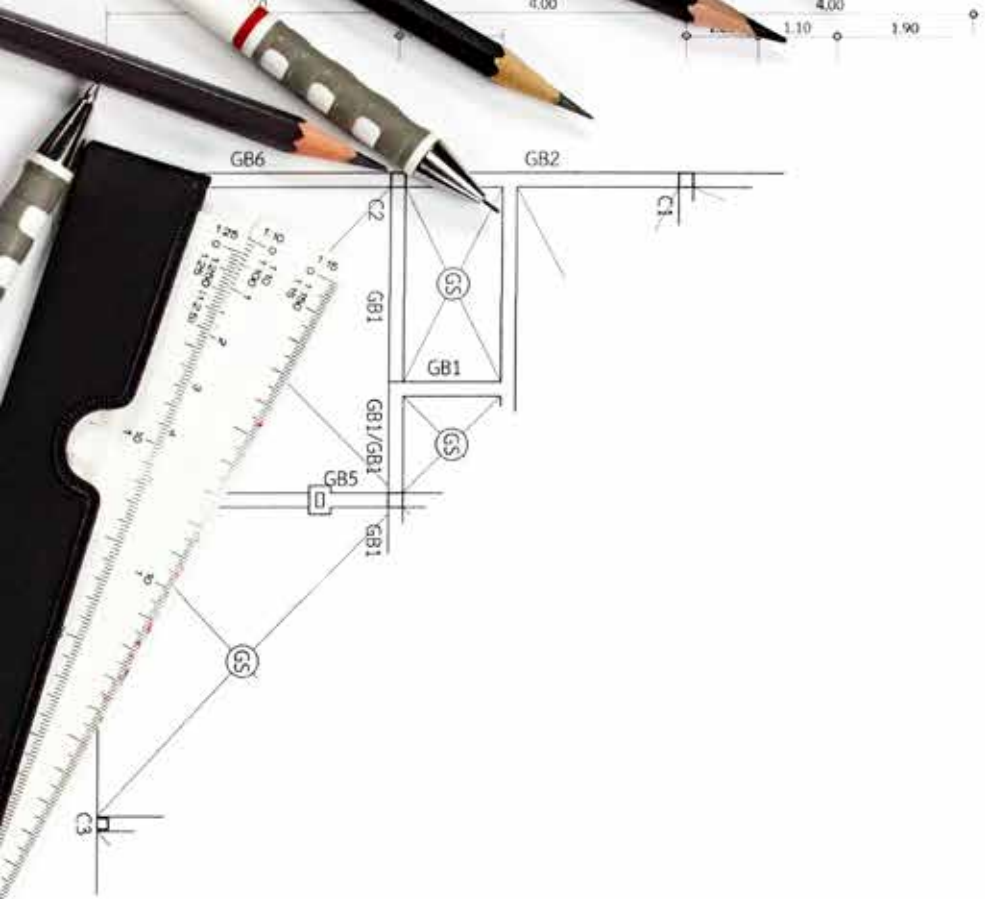
2.2.5 FUNÇÃO DE 1º GRAU.....	35
2.2.6 FUNÇÃO QUADRÁTICA.....	37
2.2.6.1 RAÍZES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA	37
2.2.6.2 VÉRTICE DA PARÁBOLA E VALOR MÁXIMO OU MÍNIMO	38
2.2.7 FUNÇÕES COMPOSTAS.....	39
2.2.8 INEQUAÇÕES	40
2.2.8.1 INEQUAÇÃO DE 1º GRAU	40
2.2.8.2 INEQUAÇÕES - PRODUTO E INEQUAÇÕES - QUOCIENTE	41
2.2.8.3 INEQUAÇÃO DE 2º GRAU	42
EXERCÍCIOS.....	44
3 POLINÔMIOS.....	53
3.1 DEFINIÇÃO.....	53
3.2 REPRESENTAÇÃO	53
3.3 VALOR NUMÉRICO DE UM POLINÔMIO.....	54
3.3.1 POLINÔMIO IDENTICAMENTE NULO	54
3.3.2 RAIZ DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL	54
3.4 IGUALDADE DE POLINÔMIOS	55
3.5 OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS.....	55
3.5.1 DIVISÃO DE POLINÔMIOS	56
3.5.1.1 MÉTODO DAS CHAVES.....	57
3.5.1.2 DIVISÃO POR $(x-a)$: DISPOSITIVO PRÁTICO DE BRIOT-RUFFINI	57
3.5.1.3 TEOREMA DE D’ALEMBERT	59
3.5.1.4 TEOREMA DO FATOR	59
4 EQUAÇÕES ALGÉBRICAS	60
4.1 DEFINIÇÃO	60
4.2 RAÍZES	60
4.3 RELAÇÕES DE GIRARD	60
4.4 PESQUISA DE RAÍZES RACIONAIS	61
EXERCÍCIOS.....	62
5 RADICIAÇÃO E POTENCIAÇÃO	64
5.1 DEFINIÇÕES.....	64
5.2 PROPRIEDADES	65
5.3 RACIONALIZAÇÃO	65
6 PRODUTOS NOTÁVEIS.....	66

7 FATORAÇÃO	67
8 COMPLETAR QUADRADOS	69
EXERCÍCIOS.....	70
9 TRIGONOMETRIA	76
9.1 O TRIÂNGULO RETÂNGULO	76
9.2 SENO, COSSENO E TANGENTE NO TRIÂNGULO RETÂNGULO.....	76
9.3 CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO	78
9.4 VALORES NOTÁVEIS DE SENO E COSSENO	79
9.5. REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE.....	80
9.5.1 ARCOS NO 2º QUADRANTE.....	80
9.5.2 ARCOS NO 3º QUADRANTE	80
9.5.3 ARCOS NO 4º QUADRANTE	80
9.5.4 ARCOS MAIORES DO QUE 360º	81
9.6 TANGENTE	81
9.7 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	83
9.7.1 FUNÇÃO SENO.....	82
9.7.2 FUNÇÃO COSSENO.....	83
9.8 LEI DOS SENOS E COSSENO.....	83
EXERCÍCIOS.....	84
10 RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	87
10.1 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE ARCOS	88
10.2 ARCO DUPLO E ARCO METADE.....	88
EXERCÍCIOS.....	89
11 LIMITES.....	91
11.1 LIMITES LATERAIS.....	92
11.2 LIMITES INFINITOS.....	93
11.3 PROPRIEDADE DOS LIMITES	95
EXERCÍCIOS.....	100
GABARITO	104
BIBLIOGRAFIA.....	116



AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Ministério da Educação (MEC) pela oportunidade de realizarem projetos acadêmicos por meio do PET; ao Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) pelo apoio financeiro; ao Departamento de Engenharia Civil/UFRR, pelo apoio aos trabalhos desenvolvidos pelo grupo.



PREFÁCIO

O Cálculo Diferencial e Integral é um ramo importante da matemática e seu campo de aplicações se estende por todas as áreas do conhecimento, desempenhando papel importante como linguagem na representação de fenômenos e, como instrumento para a resolução de problemas (CATAPANI, 2001).

A ampla aplicabilidade dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral faz com que essa disciplina esteja presente na maioria das grades curriculares de cursos de nível superior, tornando-se requisito fundamental na formação de um profissional.

Em contrapartida pode-se observar que os altos índices de evasão, baixo rendimento e reprovação nessa disciplina são bastante comuns nos anos iniciais dos cursos universitários. As principais causas deste problema apontadas por vários autores são: deficiência em matemática básica, as diferenças metodológicas do ensino médio para o curso superior e as dificuldades intrínsecas da matéria, conforme relatado em (NASCIMENTO ET. AL., 2019). Este fato tem levado a constantes questionamentos entre professores, alunos e gestores, por isso, diversas instituições têm desenvolvido ações para solucionar ou minimizar esse problema.

Uma dessas ações consiste em um curso de Pré-Cálculo, realizado por várias instituições, no início de cada semestre letivo. Nesse curso é feita uma revisão dos conteúdos de matemática do ensino médio, dando ênfase àqueles mais utilizados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e ao raciocínio lógico. Com isso, busca-se proporcionar ao aluno ingresso uma base sólida e estabelecer uma transição entre a matemática estudada no ensino médio e a abordagem matemática requerida no Ensino Superior.

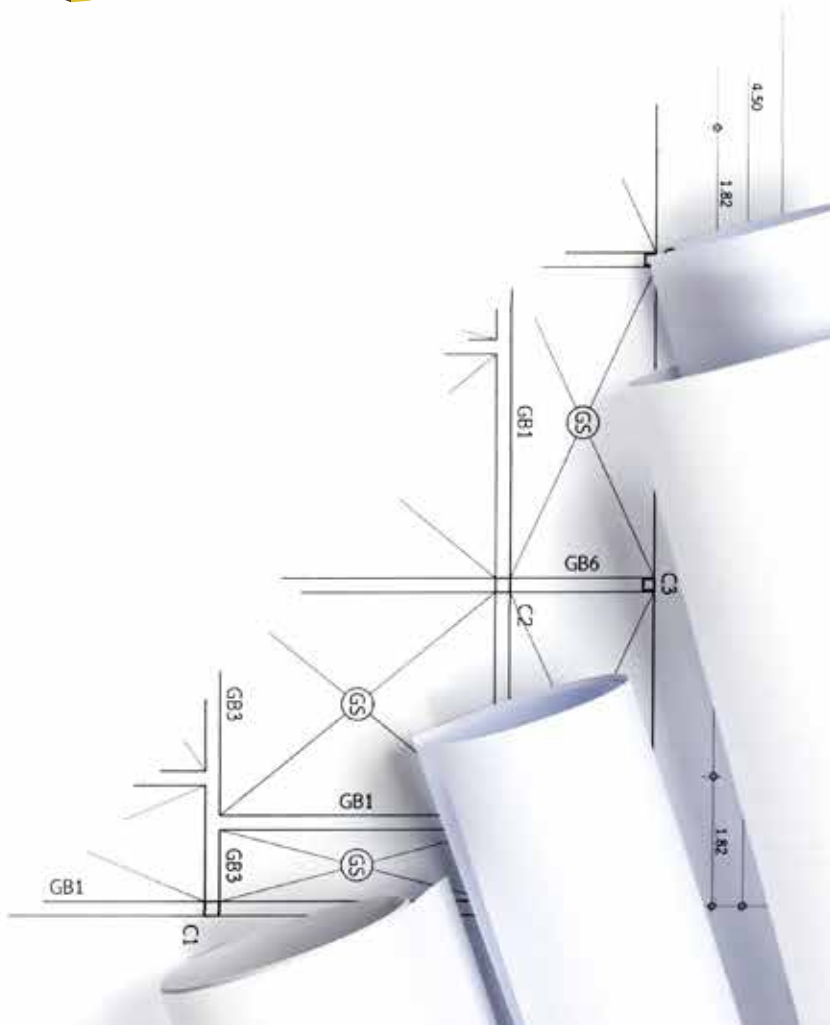
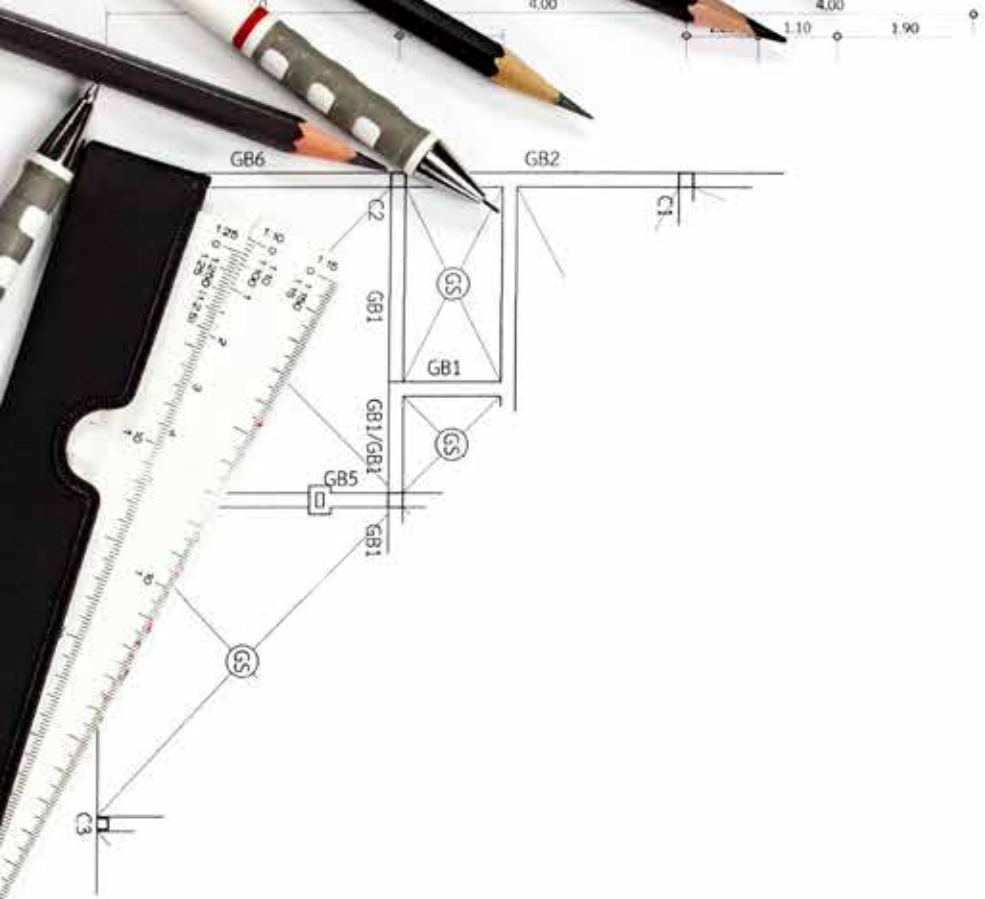
Na Universidade Federal de Roraima (UFRR), esse curso tem sido oferecido há oito anos pelo Grupo PET de Engenharia Civil aos calouros dos cursos de engenharia e ciências exatas. A participação é voluntária e o curso gratuito.

O curso tem carga horária de 40 horas, as aulas são ministradas pelos integrantes do Grupo PET e acontecem antes do início de cada semestre letivo.

Dessa forma, visa-se contribuir na adaptação dos novos alunos ao ritmo acadêmico, alertando-os para a importância do conhecimento de Matemática para o bom desempenho no âmbito acadêmico e profissional. Ou seja, visa-se a inclusão e adaptação dos ingressantes nos cursos contemplados pela ação e a redução dos índices de evapão.

A partir da experiência adquirida nos cursos de pré-cálculo já ministrados, o Grupo PET desenvolveu este livro, com o objetivo de orientar os alunos naqueles conteúdos que irão corroborar com as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

**Grupo PET-Engenharia Civil
Boa Vista-RR, Setembro de 2019.**



1 CONJUNTOS

Os objetos que constituem um conjunto são denominados **elementos** ou **membros** e são comumente denotados por letras minúsculas: $a, b, c, z \dots$

RELAÇÃO ENTRE ELEMENTO E CONJUNTO: Um objeto a qualquer pode ser **elemento** de um conjunto A .

DIZEMOS QUE	ESCREVEMOS
a pertence a A	$a \in A$
a não pertence a A	$a \notin A$

Um conjunto A pode ser representado também por uma **propriedade** ou **condição** (compreensão) de seus elementos. Por exemplo:

Propriedade 1: a é uma cor primária.

Essa propriedade pode ser expressa pelo conjunto $A = \{\text{azul, vermelho, amarelo}\}$. Assim, é indiferente dizer que a possui a **propriedade 1** ou que a pertence a A ($a \in A$).

RELAÇÃO ENTRE CONJUNTOS: Consideremos dois conjuntos, B e C .

Se todos os elementos de B forem também elementos de C , dizemos que B é um **subconjunto** de C ou que B **está contido em** C ($B \subset C$).

Da mesma forma podemos dizer que C **contém** B ($C \supset B$).

Caso exista um elemento em B que não pertence a C dizemos que B **não está contido em** C ($B \not\subset C$).

Da mesma forma podemos dizer que C **não contém** B ($C \not\supset B$).

1.1 OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

1.1.1 REUNIÃO OU UNIÃO DE CONJUNTOS

Dados dois conjuntos, A e B, a reunião $A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos de A mais os elementos de B:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Por exemplo, se $A = \{3, 6\}$ e $B = \{5, 6\}$, então $A \cup B = \{3, 5, 6\}$.

OBSERVAÇÃO:

Este “ou” da reunião não é o “ou” de exclusão da linguagem usual “vamos ao cinema ou ao teatro”. Ele significa: se $x \in A \cup B$, então $x \in A$ ou $x \in B$ pertence a ambos, isto é $x \in A \cup B$, quando pelo menos uma das afirmações, $x \in A$ ou $x \in B$, é verdadeira.

1.1.2 INTERSEÇÃO DE CONJUNTOS

Dados dois conjuntos, A e B, a interseção $A \cap B$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem simultaneamente a A e a B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Por exemplo, se $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$, então $A \cap B = \{2, 4\}$.

OBSERVAÇÃO:

1ª) $x \in A \cap B$ quando as duas afirmações, $x \in A$ e $x \in B$, são simultaneamente verdadeiras.

2ª) Se $A \cap B = \emptyset$ (vazio), então os conjuntos A e B são chamados **disjuntos**.

1.1.3 PROPRIEDADES DA UNIÃO E DA INTERSEÇÃO

1ª) COMUTATIVA

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

2ª) ASSOCIATIVA

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

3ª) DISTRIBUTIVA

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4ª) $A \subset B$ é equivalente a $A \cup B = B$ e também é equivalente a $A \cap B = A$.

1.1.4 DIFERENÇA ENTRE CONJUNTOS

De modo geral, a diferença entre conjuntos é definida por:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 3, 6, 8, 9\}$ e $B = \{1, 4, 9, 90\}$, podemos escrever o conjunto C formado pelos elementos que pertencem a A , mas que não pertencem a B . Assim, $C = \{0, 3, 6, 8\}$.

O conjunto C é chamado diferença entre A e B e é indicado por $A - B$ (lê-se A menos B).

1.1.5 NÚMERO DE ELEMENTOS DA UNIÃO DE CONJUNTOS

O número de elementos da união de dois conjuntos é igual à soma do número de elementos de cada conjunto, menos a quantidade de elementos repetidos.

1.2 CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

DEFINIÇÃO: conjunto infinito formado pelos números que permitem a contagem de elementos. Trata-se do primeiro conjunto de números que foi utilizado pelos seres humanos para enumerar objetos. Um (1), dois (2), cinco (5) e nove (9), por exemplo, são números naturais.

REPRESENTAÇÃO: \mathbb{N}

Conjunto dos Naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Números Naturais não nulos:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

1.3 CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

DEFINIÇÃO: conjunto infinito formado pela reunião dos números naturais com seu simétrico aditivo.

REPRESENTAÇÃO: \mathbb{Z}

Conjunto dos inteiros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Conjunto dos inteiros não nulos: $\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$.

Conjunto dos inteiros não positivos: $\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1\}$.

Conjunto dos inteiros não negativos: $\mathbb{Z}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$.

OBS.: O conjunto dos Naturais é subconjunto dos inteiros ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$).

1.3.1 CONJUNTO DOS NÚMEROS PARES E ÍMPARES

DEFINIÇÃO: Um número inteiro qualquer é dito par se, ao ser dividido pelo número dois, resultar em um número inteiro, caso contrário esse número é dito ímpar.

Seja P o conjunto dos números inteiros pares e I o conjunto formado pelos números inteiros ímpares, então:

$$P = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2y, y \in \mathbb{Z}\}$$

$$I = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2y - 1, y \in \mathbb{Z}\}$$

1.4 CONJUNTO DOS RACIONAIS

DEFINIÇÃO: O conjunto dos números racionais é formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração (geratriz) com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero.

REPRESENTAÇÃO: \mathbb{Q}

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Conjunto dos racionais: $\mathbb{Q} = \{-2, -3/2, -1, -1/2, -1/4, 0, 1/2, 3/4, 1, \dots\}$.

1.5 CONJUNTO DOS IRRACIONAIS

DEFINIÇÃO: Conjunto formado pelos números que não podem ser escritos na forma de fração pois possuem em suas formas decimais dízimas não periódicas.

REPRESENTAÇÃO: \mathbb{I} , mas não existe uma notação oficial.

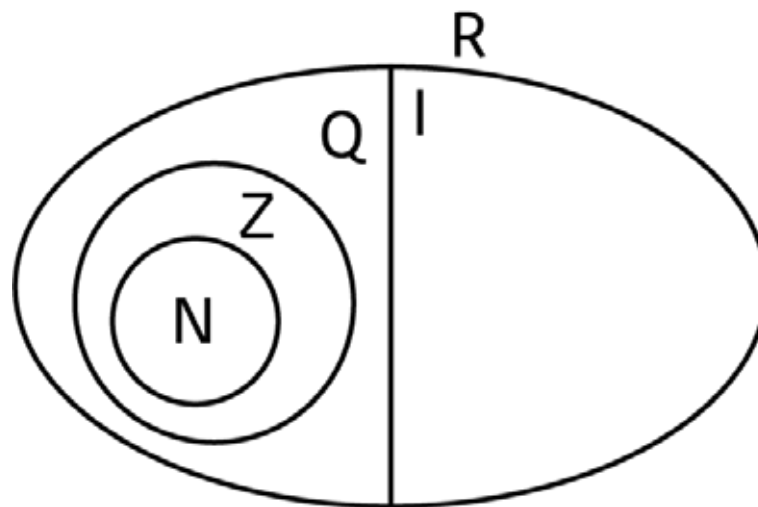
$$\mathbb{I} = \{, \dots, , \dots, e, \dots, \pi, \dots\}$$

1.6 CONJUNTO DOS REAIS

DEFINIÇÃO: Da reunião do conjunto dos números racionais com os números irracionais obtemos o conjunto dos números Reais.

REPRESENTAÇÃO: \mathbb{R}

$$\mathbb{R} = \{\dots, -1, -0,225\dots, -0,5, 0, 1, 2,0056\dots, \dots\}.$$



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

1.7 CONJUNTO DOS COMPLEXOS

DEFINIÇÃO: Conjunto formado pelos números compostos por uma parte real e uma imaginária.

A unidade imaginária que acompanha os números complexos é indicada pela letra i , através da relação:

$$i \cdot i = -1 \Leftrightarrow i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$$

REPRESENTAÇÃO: \mathbb{C}

1.8 INTERVALOS REAIS

Intervalos Limitados (os dois extremos do intervalo são finitos).

a) fechados:

Na reta:

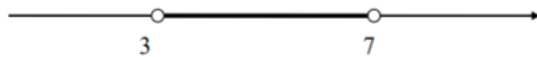


Colchetes: $[3, 7]$

Desigualdades: $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 7\}$

b) abertos:

Na reta:

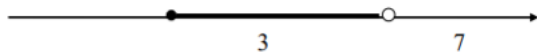


Colchetes: $] 3, 7 [$ ou $(3, 7)$

Desigualdades: $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 7\}$

c) mistos:

Na reta:



Colchetes: $[3 , 7 [$ ou $[3, 7)$

Desigualdades: $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 7\}$

Intervalo ilimitado (quando pelo menos um dos extremos não é finito).

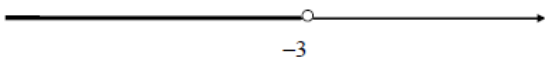
a) na reta:



colchetes: $[7, +\infty [$ ou $[7, +\infty)$

desigualdades: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$

b) na reta:



colchetes: $(- \infty, -3)$ ou $] - \infty, -3 [$

desigualdades: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$

c) na reta:



colchetes: $] - \infty, -3 [\cup [8, +\infty [$

desigualdades: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x \geq 8\}$

EXERCÍCIOS

1- (DANTE, 2013) Represente o conjunto formado pelos possíveis valores de x em cada item.

- a) $x \in \mathbb{N}$ e $x < 3$
- b) $x \in \mathbb{Z}$ e $x \geq -2$
- c) $x \in \mathbb{N}$ e $x \leq 1$
- d) $x \in \mathbb{Z}$ e $-2 < x \leq 3$
- e) $x \in \mathbb{N}$ e $x < 0$
- f) $x \in \mathbb{Z}$ e $x < 0$

2- (PUC-RIO, 2010). Sejam x e y números tais que os conjuntos $\{0, 7, 1\}$ e $\{x, y, 1\}$ são iguais. Então, podemos afirmar que:

- A) $x = 0$ e $y = 5$
- B) $x + y = 7$
- C) $x = 0$ e $y = 1$
- D) $x + 2y = 7$
- E) $x = y$

3- (ITA, 2002). Sejam A um conjunto com 8 elementos e B um conjunto tal que $A \cup B$ contenha 12 elementos. Então, o número de elementos de $P(B \setminus A) \cup P(\emptyset)$ é igual a:

- a) 8
- b) 16
- c) 20
- d) 17
- e) 9

OBS: Se X é um conjunto, $P(X)$ denota o conjunto de todos os subconjuntos de X .

$$\frac{A}{B} = \{x \in A; x \notin B\}$$

4- (UEL, 1995) Dos 30 candidatos ao preenchimento de 4 vagas em certa empresa, sabe-se que 18 são do sexo masculino, 13 são fumantes e 7 são mulheres que não fumam. De quantos modos podem ser selecionados 2 homens e 2 mulheres entre os não fumantes?

- a) 140
- b) 945
- c) 2 380
- d) 3 780
- d) 3 780
- e) 57 120

5- (AFA, 1998). Em um grupo de n cadetes da Aeronáutica, 17 nadam, 19 jogam basquetebol, 21 jogam voleibol, 5 nadam e jogam basquetebol, 2 nadam e jogam voleibol, 5 jogam basquetebol e voleibol e 2 fazem os três esportes. Qual o valor de n , sabendo-se que todos os cadetes desse grupo praticam pelo menos um desses esportes?

- a) 31
- b) 37
- c) 47
- d) 51

6- (UFPB, 1980). Sejam os reais $y_1 = 0,333\dots$, $y_2 = 5,0131313\dots$ e $y_3 = 0,202002000\dots$. Além disso, considerem-se as somas $S_1 = y_1 + y_2$, $S_2 = y_1 + y_3$ e $S_3 = y_1 + y_2 + y_3$. Então, podemos afirmar:

- a) y_1 é irracional
- b) y_2 é irracional
- c) S_1 é irracional
- d) S_2 é irracional
- e) S_3 é racional

7- (DANTE, 2013) Considere três conjuntos A , B e C , tais que: $n(A) = 28$, $n(B) = 21$, $n(C) = 20$, $n(A \cap B) = 8$, $n(B \cap C) = 9$, $n(A \cap C) = 4$ e $n(A \cap B \cap C) = 3$. Assim sendo, o valor de $n((A \cup B) \cap C)$ é:

- a) 3
- b) 10
- c) 20
- d) 21
- e) 24

8- (UDESC, 1996). Seja A o conjunto dos naturais menores que 10 e seja B outro conjunto tal que $A \setminus B = A$ e $A \cap B$ é o conjunto dos pares menores que 10. Então o conjunto B é:

- a) vazio
- b) $A \cap B$
- c) $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}$
- d) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\}$
- e) qualquer conjunto de números pares que contenha $A \cap B$.

9- (ITA, 2017) Denotemos por $n(X)$ o número de elementos de um conjunto finito X . Sejam A , B e C conjuntos tais que $n(A \cup B) = 8$, $n(A \cup C) = 9$, $n(B \cup C) = 10$, $n(A \cup B \cup C) = 2$. Então, $n(A) + n(B) + n(C)$ é igual a:

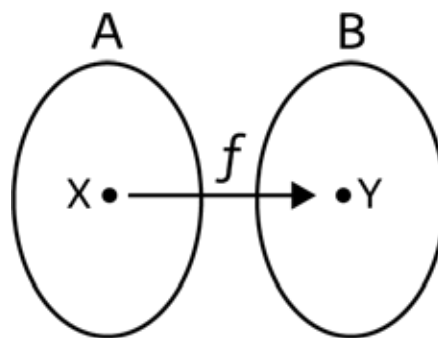
- a) 11
- b) 14
- c) 15
- d) 18
- e) 25

2 RELAÇÕES E FUNÇÕES

2.1 CONCEITOS BÁSICOS

2.1.1 DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E CONJUNTO IMAGEM

Dada uma função f de A em B , o conjunto A chama-se **domínio** da função e o conjunto B , **contradomínio** da função. Para cada $x \in A$, o elemento $y \in B$ chama-se **imagem** de x pela função f ou o valor assumido pela função f para $x \in A$, e o representamos por $f(x)$. Assim, $y = f(x)$.



O conjunto de todos os y assim obtidos é chamado conjunto imagem da função f e é indicado por $Im(f)$.

Observação: Em toda função f de A em B , $Im(f) \subset B$.

2.1.2 FUNÇÃO PAR E FUNÇÃO ÍMPAR

Função par:

Dada uma função $y=f(x)$ tal $f \in R$ que, diz-se que é uma função **par** se $f(-x)=f(x)$, para todo x no domínio de f . O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y .

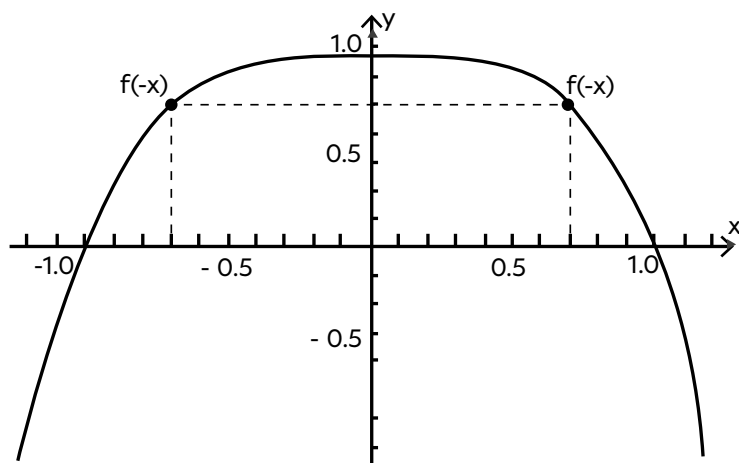
Exemplo:

$$f(x)=1-x^4$$

Para $x \in R$, temos:

$$f(-x)=1-(-x)^4=1-x^4=f(x)$$

Note a simetria em relação ao eixo y :



Função ímpar:

Dada uma função $y=f(x)$ tal que $f \in \mathbb{R}$, diz-se que é uma função **ímpar** se $f(-x) = -f(x)$, para todo x no domínio de f . O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

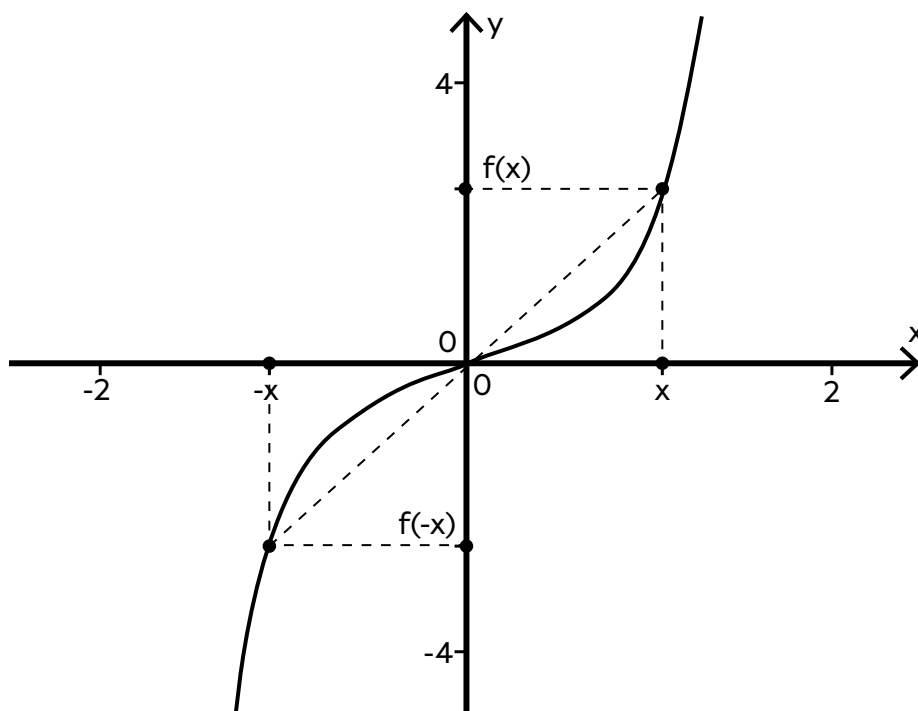
Exemplo:

$$f(x) = x^5 + x$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -(x^5 + x) = -f(x)$$

Note a simetria em relação à origem:



2.1.3 FUNÇÕES INJETIVAS, SOBREJETIVAS E BIJETIVAS

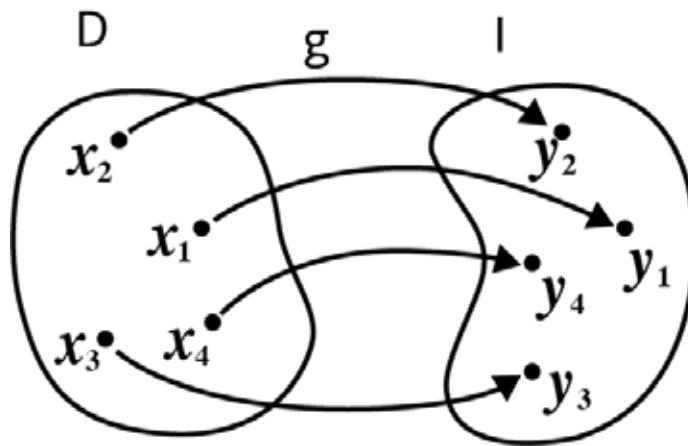
Injetivas:

Dada uma função $f \in R$, ela é denominada injetiva, ou injetora, se, para dois pontos x e y do seu domínio, com $x \neq y$, se obtiver, necessariamente:

$$f(x) \neq f(y)$$

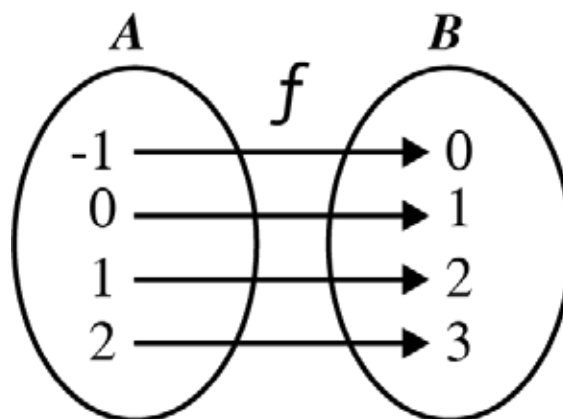
Pode-se observar que nem todas as funções apresentam essa propriedade. A exemplo da função $f(x) = x^2$, na qual é possível verificar que números reais diferentes podem levar à mesma imagem.

O diagrama a seguir apresenta a função g injetiva, pois, para todo x e y do seu domínio, com $x \neq y$, tem-se que $g(x) \neq g(y)$.



Sobrejetivas

Dada uma função $f \in R$, ela é denominada sobrejetiva, ou sobrejetora, se o seu contradomínio for igual à sua imagem. Como exemplo de função sobrejetiva, pode-se citar a função $f(x) = x + 1$, na qual, dado o domínio A e o contradomínio B , tem-se a seguinte relação:

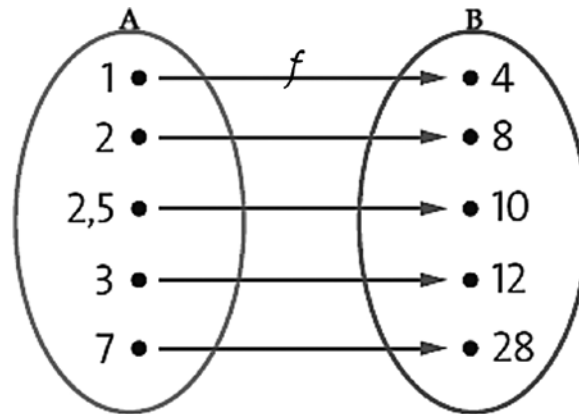


A partir do diagrama, pode-se verificar que o contradomínio B é igual à imagem da função f analisada, uma vez que não há números sobrando em B .

Bijetivas:

Uma função é denominada bijetiva ou bijetora se apresentar as características das funções injetoras e sobrejetoras simultaneamente.

Dados os conjuntos $A = \{1; 2; 2,5; 3; 7\}$ e $B = \{4; 8; 10; 12; 28\}$ e a função $A \rightarrow B$ $f(x) = 4x$, o diagrama a seguir apresenta as relações entre os elementos dos conjuntos.



Verifica-se, então, que a função é tanto injetiva quanto sobrejetiva, sendo, portanto, classificada como bijetiva.

2.2 TIPOS DE FUNÇÕES

2.2.1 FUNÇÃO INVERSA

De modo geral, para uma função f , pode-se dizer que sua inversa f^{-1} é a função que desfaz a operação realizada por f . Uma função inversa tem como objetivo a criação de funções a partir de outras, logo, uma função só será inversa caso seja bijetora, ou seja, seus pares ordenados devem apresentar a seguinte relação com a função f :

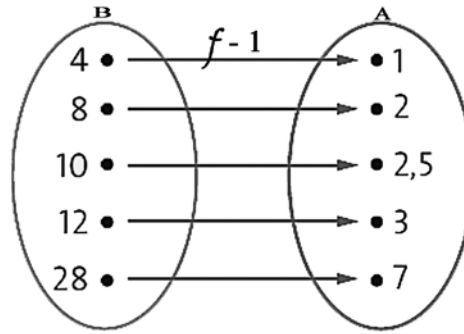
$$(x,y) \in f^{-1} \leftrightarrow (y,x) \in f.$$

Para o exemplo de função bijetiva apresentado anteriormente, a podem-se determinar os seguintes pares ordenados:

$$f = \{(1;4); (2;8); (2,5;10); (3;12); (7;28)\}$$

Tem-se que a função analisada é bijetiva, uma vez que cada elemento de A (domínio) está ligado a um elemento diferente no conjunto B e não há elementos sobrando em B. Logo, pode-se afirmar que, por ser bijetiva, a função admite inversa.

A sua função inversa é indicada por $f^{-1} : B \rightarrow A$ e, para determiná-la, é necessário realizar a troca entre x e y na função $y = 4x$. Desse modo, tem-se: $x = 4y \rightarrow y = x/4$, portanto $f^{-1}(x) = \frac{x}{4}$. A figura a seguir apresenta o diagrama da função f^{-1}



Note que o domínio inicial da função se torna a imagem da função inversa, assim como o contrário também é verdadeiro.

Exemplos:

Função $y=f(x)$	Função inversa $y=f^{-1}(x)$	Inverso de função $y=[f(x)]^{-1}$
$y=2x+3$	$y=\frac{x-3}{2}$	$y=\frac{1}{2x+3}$
$y=a^x$	$y=\log_a x$	$y=\frac{1}{a^x}$
$y=\text{sen } x$	$y=\text{arcsen } x$	$y=\frac{1}{\text{sen } x}$

2.2.2 FUNÇÃO EXPONENCIAL

DEFINIÇÃO: Função Exponencial é aquela cuja variável está no expoente e cuja base é sempre um valor positivo diferente de 1.

Dado um número real positivo e tal $a \neq 1$ que . Determina-se a função exponencial de base a, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x)=a^x$, como uma função que apresenta as seguintes propriedades, para todos x e y reais:

$$1) a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$2) f(1)=a^1=a$$

Exemplos:

$$f(x) = 4^x, \quad f(x) = (0,1)^x, \quad f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$$

Nos exemplos acima as bases das funções são: 4, 0,1 e $\frac{2}{5}$, enquanto x é o expoente.

CLASSIFICAÇÃO:

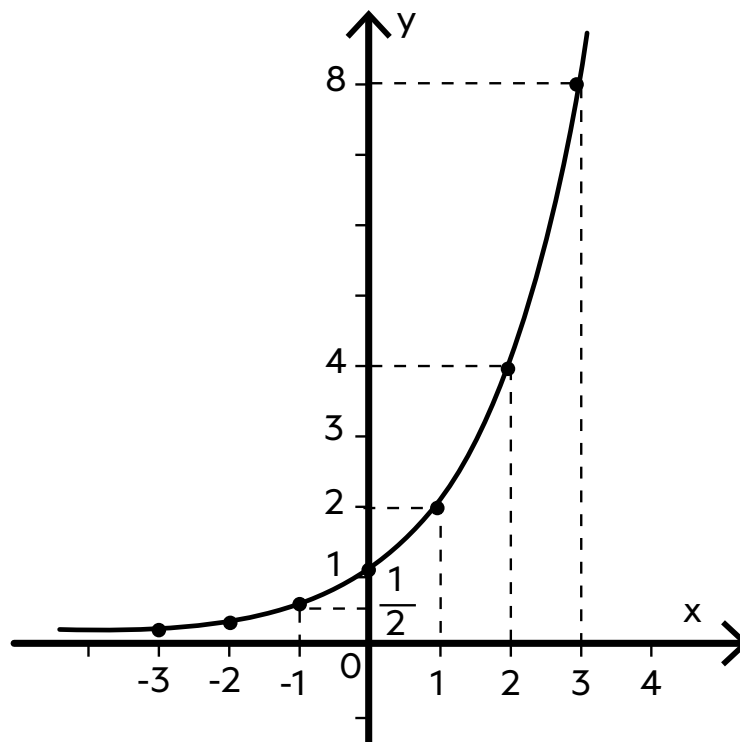
Quando as funções exponenciais apresentam bases cujos valores são maiores que 1, essas funções são denominadas **crecentes**. Já as funções cujas bases são menores do que 1 são denominadas **decrescentes**.

GRÁFICO:

A seguir, serão analisados os gráficos de dois casos de funções exponenciais, o primeiro com base maior que 1 e o segundo com base positiva menor que 1

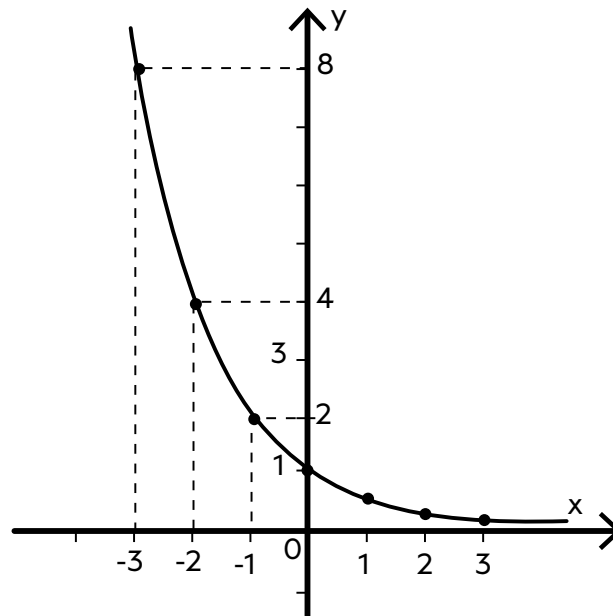
1ª) $f(x) = 2^x$ ou $y = 2^x$, ou seja, $a > 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

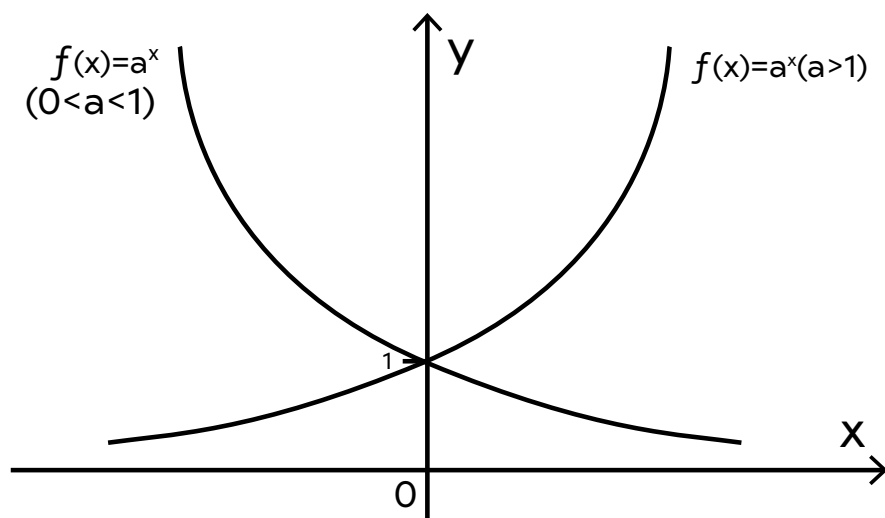


2ª) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ou $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, ou seja, $0 < a < 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



Em geral, pode-se observar o seguinte comportamento do gráfico da função $f(x) = a^x$ para $a > 1$ e $0 < a < 1$:



A partir da análise dos gráficos, pode-se concluir os seguintes pontos acerca das funções exponenciais:

- O gráfico é denominado curva exponencial e sempre passa por (0, 1);
- O gráfico nunca alcança o eixo x, ou seja, $f(x)=a^x$ não assume o valor zero (não existe x real tal que $f(x)=0$);
- Uma vez que a deve ser um número real positivo, o gráfico de $f(x)=a^x$ não apresenta pontos nos quadrantes III nem IV;
- A função exponencial é ilimitada superiormente;
- A função exponencial é sempre bijetiva e, logo, admite função inversa;
- $f(nx)=(f(x))^n$ para todo n inteiro e x real.

OBSERVAÇÃO: Com as ferramentas de Cálculo I, é possível realizar uma melhor análise sobre o comportamento do gráfico.

2.2.3 LOGARITMO E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Nesta seção serão apresentadas situações que podem ser modeladas pela inversa da função exponencial estudada anteriormente, a função logarítmica.

DEFINIÇÃO: Dados dois números reais positivos **a** e **b**, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente **c** chama-se logaritmo de **b** na sua base **a**, ou seja:

$$\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b, \text{ com } a \text{ e } b \text{ reais positivos e } a \neq 1$$

Onde: **a** é a base do logaritmo, **b** é o logaritmando e **c** é logaritmo.

Observação: quando a base do logaritmo for 10 pode-se omitir a base, escrevendo-se apenas $\log b$.

2.2.3.1 CONSEQUÊNCIAS DA DEFINIÇÃO DE LOGARITMO

$$1) \log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1$$

$$2) \log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a$$

$$3) \log_a a^n = n, \text{ pois } a^n = a^n$$

$$4) a^{\log_a n} = n, \text{ pois } \log_a n = m \Rightarrow a^m = n \Rightarrow a^{\log_a n} = n$$

$$5) \log_a m = \log_a n \Rightarrow m = n, \text{ pois } a^{\log_a m} = m \Rightarrow m = n$$

2.2.3.2 PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DOS LOGARITMOS

I) Produto

O logaritmo do produto de dois números positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números em uma mesma base, ou seja, dados $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, com $a \neq 1$, tem-se:

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$$

Exemplo: $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$

$$\log_3(3.9) = \log_3(3 \cdot 3^2) = \log_3 3^3 = 3$$

$$\log_3(3.9) = \log_3 3 + \log_3 3^2 = 1 + 2 = 3$$

II) Divisão

O logaritmo do quociente de dois números positivos é igual à diferença entre os logaritmos desses números em uma mesma base, ou seja, dados $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, com $a \neq 1$, tem-se:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Exemplo: $\log_3\left(\frac{3}{27}\right) = \log_3\left(\frac{3}{3^3}\right) = \log_3 3^{1-3} = -2$

$$\log_3\left(\frac{3}{27}\right) = \log_3\left(\frac{3}{3^3}\right) =$$

$$\log_3 3 - \log_3 3^3 = -2$$

III) Potência

O logaritmo de uma potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Exemplo: $\log_3 7^3 = \log_3 7 \cdot 7 \cdot 7 = 3 \cdot \log_3 7$

Observação: Pode-se utilizar essa mesma propriedade para o logaritmo de uma raiz, sendo b um número real positivo:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$$

2.2.3.3 MUDANÇA DE BASE

A operação de mudança de base é realizada quando se deseja reescrever um logaritmo com uma base diferente.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Exemplo: $\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2} = \frac{3}{2}$

Observação: caso particular, se $c = b$.

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\Rightarrow \log_a b \cdot \log_b a = 1$$

2.2.3.4 COLOGARITMO

Cologaritmo pode ser definido como o inverso do logaritmo, ou seja, é o logaritmo do inverso do logaritmando:

$$\text{colog}_a b = -\log_a b = \log_a \frac{1}{b}$$

2.2.3.5 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

A função logarítmica é a inversa da função exponencial de base **a** que associa a cada número real positivo **x** o número real **log_a x**, denominado logaritmo de **x** na base **a**.

DEFINIÇÃO: Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada função logarítmica quando existe um número real **a**, com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que para todo .

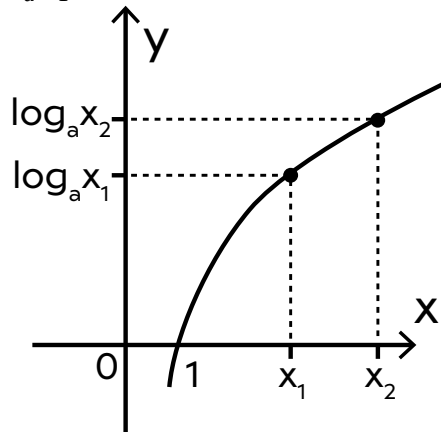
Assim, deve-se elevar a base **a** ao expoente para se obter **x**.

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

2.2.3.6 GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

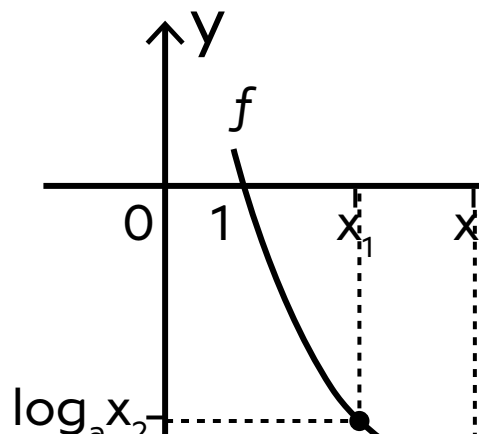
Caso 1: $a > 1$ a função logarítmica é crescente

$$(x_2 > x_1 \Leftrightarrow) \log_a x_2 > \log_a x_1$$



Caso 2: $0 < a < 1 \rightarrow$ a função logarítmica é decrescente

$$(x_2 > x_1 \Leftrightarrow) \log_a x_2 < \log_a x_1$$



A partir da análise dos gráficos e da definição de função logarítmica, pode-se concluir os seguintes pontos:

- O gráfico da função logarítmica sempre passa pelo ponto $(1, 0)$;
- O gráfico da função logarítmica nunca toca o eixo y ;
- A função logarítmica é ilimitada tanto superiormente, quanto inferiormente;
- Se $a > 1$, a função logarítmica é crescente e os números acima de 1 têm logaritmos positivos e números entre 0 e 1 possuem logaritmos negativos;
- Se $0 < a < 1$, a função logarítmica é decrescente e os números maiores que 1 têm logaritmo negativos e os números entre 0 e 1 possuem logaritmo positivo;
- A função logarítmica é sobrejetiva, pois, para qualquer número real b , existe sempre um único número real positivo correspondente x tal que $\log_a x = b$. É também injetiva, pois números positivos diferentes apresentam valores de logaritmos diferentes. Logo, a função logarítmica é uma função bijetiva.

Obs.: Essas observações provêm do estudo do cálculo.

2.2.3.7 LOGARITMO NATURAL

É o logaritmo cuja base é e (euler), denominado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, sendo este um número irracional e transcendente, assim como o π .

O número de Euler pode ser determinado de diversas formas, nas quais não se entrará em detalhes, e vale aproximadamente 2,7183.

Para representarmos o logaritmo na base e utilizamos **ln** no lugar de **log**, isto é, $\log_e x = \ln x$

Desafio: Seja

$$a = \log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \log(\tan 3^\circ) \dots \\ + \log(\tan 87^\circ) + \log(\tan 88^\circ) + \log(\tan 89^\circ).$$

Quanto vale **a**?

2.2.4 FUNÇÃO MODULAR

Denomina-se função modular a função f , de \mathbb{R} em \mathbb{R} , tal que $f(x) = |x|$. Assim:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplo:

Dada a função $f(x) = |2x - 8|$, calcular $f(x)$ para $x=5$:

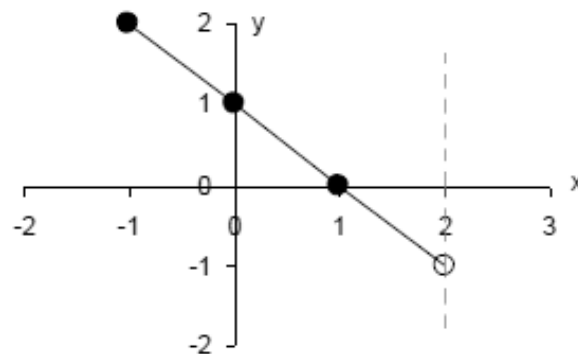
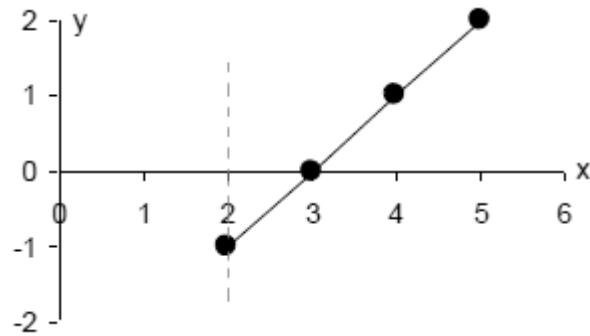
$$f(5) = |2 \cdot 5 - 8| = |10 - 8| = |2| = 2$$

2.2.4.1 GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO MODULAR

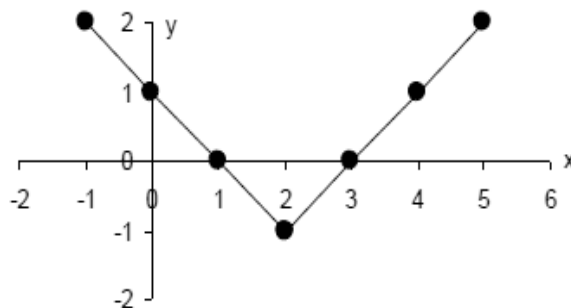
Vamos construir o gráfico da função $f(x) = |x-2| - 1$.

1ª definição:	2ª definição:
$x - 2 \geq 0$ $x \geq 2$	$x - 2 < 0$ $x < 2$
$ x - 2 - 1 =$ $x - 2 - 1 =$ $x - 3$	$ x - 2 - 1 =$ $-(x - 2) - 1 =$ $-x + 1$
Então $f(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 1, & \text{se } x < 2 \end{cases}$	

Pela segunda definição:



Unindo os dois gráficos, temos:



$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq -1\} \text{ e } D(f) = \mathbb{R}$$

2.2.5 FUNÇÃO DE 1º GRAU

Uma função polinomial do 1º grau, ou função afim, pode ser definida como qualquer função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} que pode ser escrita seguindo a lei de formação $f(x)=ax+b$, onde a e b são números reais dados, com $a \neq 0$, e x uma variável.

Na função $f(x)=ax+b$, o número a é chamado de coeficiente de x e o número b é chamado de termo constante.

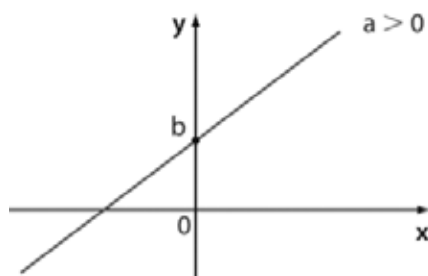
Exemplo: $f(x)=4x+2$, $a=4$ e $b=2$

A representação gráfica de uma função do 1º grau é uma reta. Ao analisar a lei de formação $f(x)=ax+b$, é possível notar a dependência entre x e $f(x)$. O valor de a indica se a

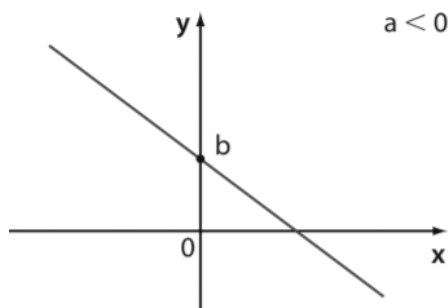
função é crescente ou decrescente e o valor de b indica o ponto de intersecção da função com o eixo y no plano cartesiano.

A função é crescente quando, na medida que o valor de x aumenta, os valores correspondentes a y também aumentam, e decrescente quando os valores de y diminuem. Exemplos podem ser observados abaixo:

Função crescente



Função decrescente



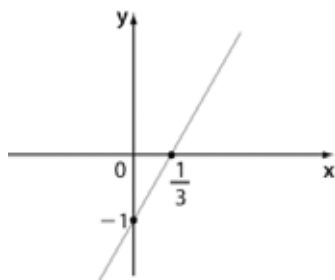
Exemplo:

Para construir o gráfico de uma função $y=3x-1$ sabendo que o gráfico é uma reta, basta obter dois pontos e ligá-los.

Para $x=0$, temos $y=-1$, portanto o ponto é $(0,-1)$.

Para $y=0$, temos $x = \frac{1}{3}$, portanto o ponto é $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

Marcando os pontos no plano cartesiano e ligando eles com uma reta, obtém-se o gráfico:



Como pode ser observado, o gráfico de uma função afim é uma reta.

Obs.: O coeficiente de x , a , é chamado coeficiente angular da reta e está ligado à inclinação da reta em relação ao eixo Ox . O termo constante b é chamado coeficiente linear da reta e é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo Oy .

2.2.6 FUNÇÃO QUADRÁTICA

DEFINIÇÃO: Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se **quadrática** quando existem números $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, tal que

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola que tem concavidade para cima se $a > 0$ ou concavidade para baixo se $a < 0$.

2.2.6.1 RAÍZES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

No capítulo de polinômios, discutiu-se a obtenção das raízes de um polinômio de grau n , seja pelas fórmulas de Girard, seja pelo método da pesquisa de raízes. Vejamos algumas formas de determinar as raízes de uma função quadrática:

Fórmula de Bhaskara

As raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Em que $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante da função.

Se $\Delta > 0$, há duas raízes reais distintas $x' \neq x''$.

Se, $\Delta = 0$ as raízes reais são iguais $x' = x''$.

Se $\Delta < 0$, a função não tem raízes reais.

Relações de Girard

Como já visto anteriormente, a soma e o produto das raízes de uma equação de segundo grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$ é igual a:

$$Soma = S = x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

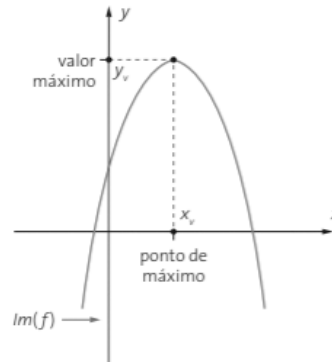
$$Produto = P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

Nesse caso, o processo é feito por tentativa.

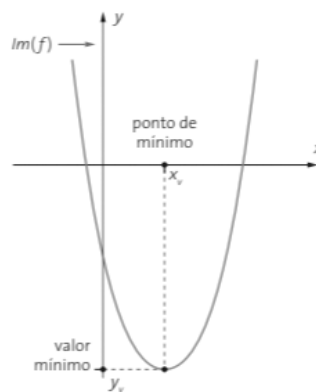
2.2.6.2 VÉRTICE DA PARÁBOLA E VALOR MÁXIMO OU MÍNIMO

A determinação do vértice da parábola permite determinar a imagem da função, além do seu valor máximo ou mínimo.

$$a < 0$$



$$a > 0$$



Uma das maneiras de determinar o vértice da parábola é utilizando-se da simetria dessa função, outra forma é por meio de fórmulas. Vejamos o cálculo do vértice para a função.

1º modo:

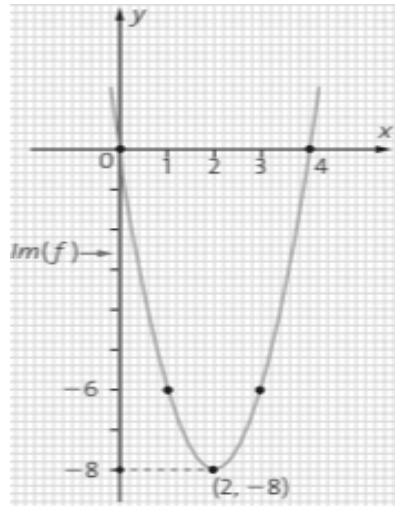
Calculando as raízes obtemos $x' = 0$ e $x'' = 4$ com $a=2>0$, ou seja, concavidade da parábola para cima. A partir da simetria das raízes com relação a um eixo vertical, temos que a posição do vértice em x , x_v é:

$$x_v = \frac{x' + x''}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

Substituindo x_v em f obtemos y_v daí

$$\begin{aligned} y_v &= f(x_v) = f(2) \\ &= 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 \\ &= -8 \end{aligned}$$

Então, o vértice é o ponto $(2, -8)$.



Como o valor mínimo é $y = -8$, então $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -8\}$. Não havendo valor máximo para a função.

Generalizando: dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, se $V = (x_v, y_v)$ é o vértice da parábola correspondente, temos:

$$a > 0 \Leftrightarrow y_v \text{ é o valor mínimo de } f \Leftrightarrow Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v\}.$$

$$a < 0 \Leftrightarrow y_v \text{ é o valor máximo de } f \Leftrightarrow Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_v\}$$

2º modo:

Outra forma de obter as coordenadas do vértice é pela fórmula:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

Para o nosso exemplo:

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 64$$

$$V = \left(-\frac{-8}{2 \cdot 2}, -\frac{64}{4 \cdot 2} \right) = (2, -8)$$

2.2.7 FUNÇÕES COMPOSTAS

DEFINIÇÃO: Dadas duas funções f e g , a função $f \circ g$ composta (também chamada f bola g) é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Em geral, para qualquer que seja as funções f e g , inicia-se com um número x dentro do domínio de g , após isso, pode-se encontrar sua imagem $g(x)$. Se este número encontrado estiver dentro do domínio de f , pode-se determinar o valor de $f(g(x))$.

Veamos um exemplo: Se $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{4}{3} < x \leq 5\right\}$ ou $\left(\frac{4}{3}, 5\right]$, encontre as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.

Temos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$$

$$f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$$

$$g(x^2) = x^2 - 3$$

2.2.8 INEQUAÇÕES

Inequação é uma expressão matemática que tem como objetivo expressar desigualdades. Para tanto, fazemos o uso dos sinais

$<$: menor que

$>$: maior que

\leq : menor que ou igual

\geq : maior que ou igual

Ao contrário das equações, a solução de uma inequação não necessariamente consiste em um único valor, podendo ser dada por intervalos. Vejamos em um exemplo como resolver uma inequação.

2.2.8.1 INEQUAÇÃO DE 1º GRAU

Exemplo:

a) $2x - 300 > 0$

Esse problema não apresenta dificuldades por se tratar de uma única equação de grau 1. Então, basta prosseguir como se faz com equações para encontrar a solução.

$$2x > 300$$

$$x > 300/2$$

$$x > 150$$

Escrevendo em forma de intervalo:

$$\{x \in (150, +\infty)\}$$

$$b) \begin{cases} 3x - 4 > 0 \\ -x + 5 \geq 0 \end{cases}, \text{ para } x \in \mathbb{R}$$

Resolveu-se separado cada uma das inequações e pegou-se o intervalo que satisfaz ambas como solução. Vejamos:

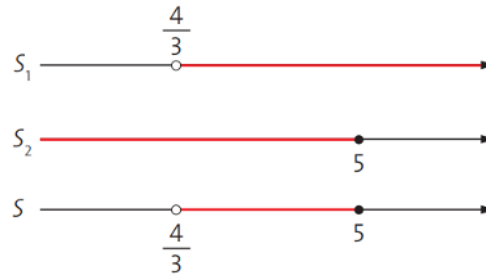
$$3x - 4 < 0 \Rightarrow S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{4}{3}\right\}$$

$$-x + 5 \geq 0 \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$$

Tomando a interseção dos conjuntos

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{4}{3} < x \leq 5 \right\} \text{ ou } \left(\frac{4}{3}, 5 \right]$$

Pode-se observar graficamente na figura abaixo.



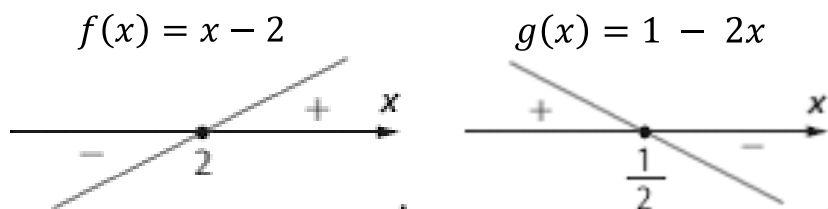
2.2.8.2 INEQUAÇÕES - PRODUTO E INEQUAÇÕES - QUOCIENTE

A resolução aqui é mais complexa, pois exige a análise do sinal dos termos da inequação em todo o seu domínio.

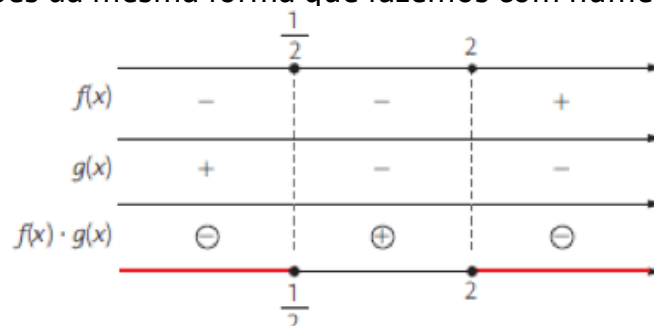
Exemplo:

Inequação-produto: $(x-2)(1-2x) \leq 0$, para $x \in \mathbb{R}$.

Utiliza-se outra metodologia para abordar esta desigualdade, não sendo aconselhável tentar resolver separadamente os termos para a desigualdade ≤ 0 , pois os termos se multiplicam. Devemos proceder de outra maneira: representando graficamente as equações e fazendo a análise de sinal ao longo de todo o domínio.



Representando na reta real e lembrando que no produto $f(x) \cdot g(x)$, fazemos “jogo de sinais” com as funções da mesma forma que fazemos com números.



Logo, os intervalos que nos interessam são dois e escrevemos:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 2 \right\}.$$

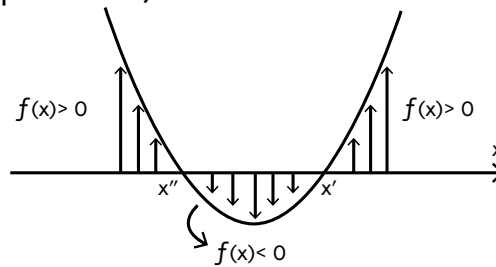
A resolução das inequações-quociente se dá de modo análogo.

2.2.8.3 INEQUAÇÃO DE 2º GRAU

Nesse caso, a análise de sinal é feita a partir da parábola resultante da função quadrática.

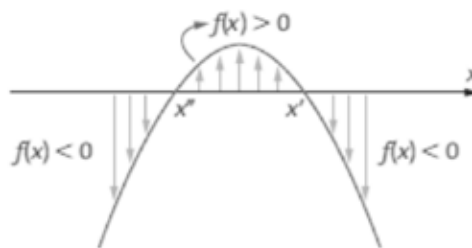
1º caso: $\Delta > 0$

a) $a > 0$ (concauidade para cima)



$$\begin{cases} f(x)=0 \text{ para } x=x'' \text{ ou } x=x' \\ f(x)>0 \text{ para } x<x'' \text{ ou } x>x' \\ f(x)<0 \text{ para } x''<x<x' \end{cases}$$

b) (concauidade para baixo)

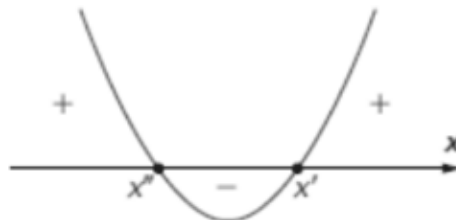


$$\begin{cases} f(x)=0 \text{ para } x=x'' \text{ ou } x=x' \\ f(x)>0 \text{ para } x''<x<x' \\ f(x)<0 \text{ para } x<x'' \text{ ou } x>x' \end{cases}$$

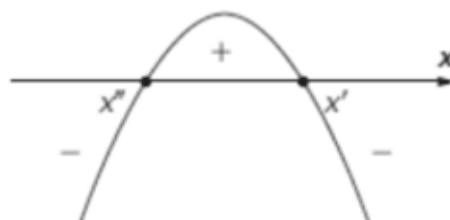
Outra forma representativa dos sinais é dada abaixo:

1º caso: $\Delta > 0$

a) $\Delta > 0$ e $a > 0$



b) $\Delta > 0$ e $a < 0$



2º caso: $\Delta = 0$

a) $\Delta = 0$ e $a < 0$



$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ para } x = x' = x'' \\ f(x) > 0 \text{ para } x \neq x' \end{cases}$$

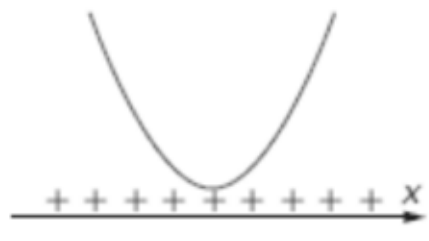
b) $\Delta = 0$ e $a < 0$



$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ para } x = x' = x'' \\ f(x) < 0 \text{ para } x \neq x' \end{cases}$$

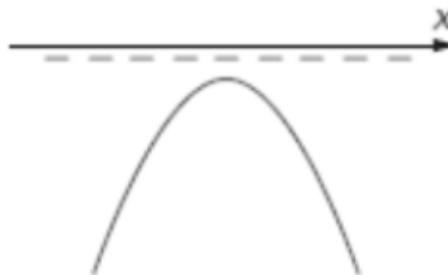
3º caso: $\Delta < 0$

a) $\Delta < 0$ e $a > 0$



$f(x) > 0$ para todo x real

b)



$f(x) < 0$ para todo x real

EXERCÍCIOS

Funções

1- Considere g uma função da forma $g(x) = ax + b$, com $x \in \mathbb{R}$. Se $g(-2) = -4$ e $2g(3) = 12$, os valores de a e b são, respectivamente:

- a) $-\frac{1}{2}$ e 0
- b) 0 e $\frac{1}{2}$
- c) 0 e 2
- d) $\frac{1}{2}$ e 0
- e) 2 e 0

2- A função f satisfaz $f(2x + 3) = 3x + 2$. Nestas condições, $f(3x + 2)$ é equivalente:

- a) $2x + 3$
- b) $3x + 2$
- c) $(2x + 3) / 2$
- d) $(9x + 1) / 2$
- e) $(9x - 1) / 3$

3- Sejam f e g as funções tais que $f(x) = 2x^2 - 4$ e $g(x) = 4x^2 - 2x$, se x satisfaz $f(x) = g(x)$, então $2x$ é:

- a) $\frac{1}{4}$
- b) 1
- c) 8
- d) 4
- e) $\frac{1}{2}$

4- (DANTE, 2013) Dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |3 - x| + 4$, definida por , calcule:

- a) $f(8)$
- b) $f(-1)$
- c) $f(3)$
- d) $f(0)$

5- (DANTE, 2013) Construa o gráfico da função $f(x) = |3 - x| + 4$ definida por e determine a $D(f)$ e $Im(f)$.

6- (DANTE, 2013) Resolva as equações:

- a) $|6 - x| = 10$ b) $|3x - 1| = 5$
 c) $|4x - 1| = -3$ d) $|x^2 + 6x - 1| = 6$
 e) $|x^2 - 5x| = 6$ f) $|x^2 - 6| = -1$
 g) $|x|^2 - 4|x| - 5 = 0$ h) $|x|^2 - 4 = 0$

7- (DANTE, 2013) Determine o valor de m para que o gráfico da função $f(x) = 2x + m - 3$:

- a) intersecte o eixo y no ponto $(0, 5)$;
 b) intersecte o eixo x no ponto $(3, 0)$.

Logaritmo e função logarítmica

8. (UFRR, 2006) Se $\log_5 x = 1$ e $\log_5 y = 3$, com x e y inteiros maiores que 1, então:

- a) $x \cdot y = 15$
 b) $x + y = 20$
 c) $x \cdot y = 25$
 d) $x = y = 30$.

9. Considere a igualdade: $b - a = 5$. Dessa forma, pode-se afirmar que:

- a) 10
 b) 25
 c) 32
 d) 64
 e) 128

10. (DANTE, 2013) Se $\log E = 2 \log a + 3 \log b - \log c - \log d$, então E é igual a:

a) $a^2 + b^3 - c - d$

b) $a^2 b^3 - cd$

c) $\frac{a^2 b^3}{cd}$

d) $\frac{a^2 b^3 d}{c}$

e) $a^2 b^3 cd$

11. Sejam as seguintes igualdades dadas $4 = A$ e $6 = B$, então o valor 5 é:

a) \sqrt{AB}

b) $(A + B)/2$

c) $(A \cdot B)/2$

d) $1 - A$

e) $1 - B$

12. (FUVEST, 2009). O número real a é o menor dentre os valores de x que satisfazem a equação $2 \log_2(1 + \sqrt{2x}) - \log_2(\sqrt{2x}) = 3$. Então, $\log_2\left(\frac{a+4}{3}\right)$ é igual a:

a) $1/4$

b) $1/2$

c) 1

d) $3/2$

e) 2

13. (Mackenzie - SP, 2002). O produto $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$ é igual a:

a) $\log_3 64$

b) $\log_2 63$

c) 2

d) 4

e) 6

14. (FUVEST, 1994). O número real x que satisfaz a equação $\log_2 (12-2^x)=2x$ é:

- a) $\log_2 5$
- b) $\log_2 \sqrt{3}$
- c) 2
- d) $\log_2 \sqrt{5}$
- e) $\log_2 3$

15. (UNICAMP, 2011). Resolva o sistema

$$\begin{cases} \log_2 x \log_4 y = 4 \\ x \cdot y = 8 \end{cases}$$

16. (VUNESP, 1996) Em que base o logaritmo de um número natural n , $n > 1$, coincide com o próprio número n ?

- a) n^n
- b) $1/n$
- c) $n/2$
- d) n
- e) $n^{1/n}$

17. (DANTE, 2013) Considerando $a^2 + b^2 = 70ab$, calcule o valor da expressão:

$$\log_5 \frac{(a+b)^2}{ab} \quad \text{em função de } m = \log_5 2 \text{ e } n = \log_5 3$$

18. (DANTE-2013) Sejam x , y e z números reais positivos tais que seus logaritmos numa dada base k são números primos satisfazendo

$$\log_k (xy) = 49$$

$$\log_k (x/z) = 44$$

Então, $\log_k xyz$ é igual a

- a) 52 b) 61
- c) 67 d) 80
- e) 97

Inequações de 1º grau

19. (DANTE-2013) Resolva, em R as inequações:

a) $3-4x > x-7$

b) $\frac{x}{4} - \frac{3(x-1)}{10} \leq 1$

c) $1 \leq x+1 < 5$

d) $\begin{cases} 5-2x \leq 4 \\ x-5 \leq 1-x \end{cases}$

e) $(2x+1)(x+2) \leq 0$

f) $(x-1)(2-x)(-x+4) < 0$

g) $\frac{2x-3}{1-x} \geq 0$

h) $\frac{(x+1)(x+4)}{x-2} > 0$

20. (Vunesp, 2014) Duas pequenas fábricas de calçados, A e B, têm fabricado, respectivamente, 3 000 e 1 100 pares de sapatos por mês. Se, a partir de janeiro, a fábrica A aumentar sucessivamente a produção em 70 pares por mês e a fábrica B aumentar sucessivamente a produção em 290 pares por mês, a produção da fábrica B superará a produção de A a partir de:

- a) março b) maio c) julho d) setembro e) novembro

Inequações de 2º grau

21. (DANTE, 2013) Estude o sinal das seguintes funções quadráticas:

a) $f(x) = x^2 - 3x - 4$

b) $f(x) = x^2 - 4$

22. (DANTE-2013) Resolva as seguintes inequações do 2º grau em R:

a) $3x^2 - 10x + 7 < 0$

b) $-4x^2 + 9 \geq 0$

c) $3(x-1) - 6x \geq 2 - 2x(x-3)$

d) $-2x^2 - x + 1 \leq 0$

Função par e ímpar

23. Classifique as funções a seguir em pares, ímpares ou sem paridade:

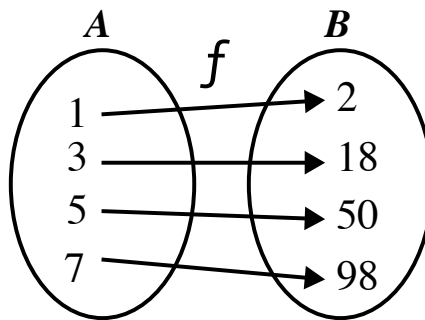
a) $f(x)=4x$

b) $f(x)=x^2-1^\infty$

c) $f(x)=x^2-3x+8$

Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva

24. De acordo com a figura abaixo que representa uma função, marque a alternativa correta:



a) $f(x) = 2x + 2$; Bijetora

b) $f(x) = x^2 + 2$; Injetora

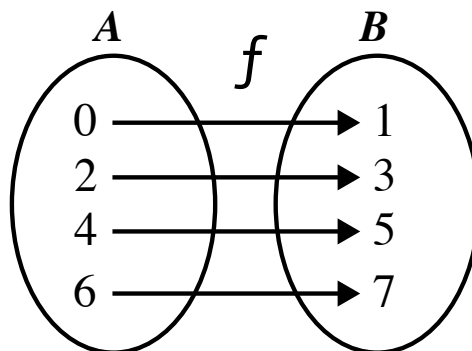
c) $f(x) = 2x^2$; Sobrejetora

d) $f(x) = 2x^2$; Bijetora

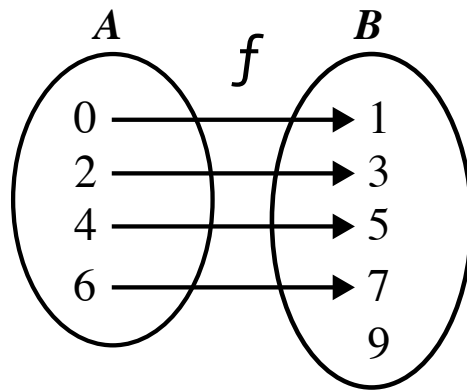
e) $f(x) = x^2$; Injetora

25. Verifique se as funções são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras:

a) $f: A \rightarrow B$



b) $f: A \rightarrow B$



Função de 1º grau

26. Classifique as funções seguintes em crescente e decrescente:

a) $y = 2x + 4$

b) $f(x) = -x + 8$

c) $y = (x + 2)4 - (x - 1)6$

27. Determine os zeros das funções a seguir:

a) $y = 5x + 4$

b) $y = -2x$

c) $f(x) = \frac{x}{2} + 8$

28. O gráfico da função $f(x) = px + n$ passa pelos pontos $(-1, 3)$ e $(2, 7)$. Qual o valor de p ?

Raízes da função quadrática

29. Determine o valor de m positivo para que a equação $x^2 - 2mx + (m+1) = 0$ tenha uma raiz igual ao triplo da outra.

30. Para que valores reais de k a função $f(x) = (k-1)^2 - 4x - 1$ não admite raízes reais?

31. Para que valores reais de k a função $f(x) = kx^2 - 6x + 1$ admite raízes reais e diferentes?

Vértice da parábola e valor máximo ou mínimo

32. Determine a $Im(f)$ e o valor máximo ou mínimo da função quadrática $f(x)=x^2+8x-4$.

33. Determine m de modo que a função $f(x)=(3m-1)x^2-5x+2$ admita valor máximo.

34. A trajetória da bola, em saque “copinho” durante jogo de vôlei, descreve uma parábola. Supondo que sua altura h , em metros, t segundos após o saque, seja dada por

$$h=-t^2+6t, \text{ reponda:}$$

- Em que instante a bola atinge a altura máxima?
- Qual é a altura máxima atingida pela bola?

35. Faça o esboço do gráfico das seguintes funções quadráticas e determine o conjunto imagem de cada uma delas:

a) $f(x)=x^2+4x+3$

b) $f(x)= -x^2+6x-9$

36. A reta, gráfico da função $f(x)=3x-1$ e a parábola, gráfico da função $g(x)=x^2-x+2$, têm pontos comuns? Se tiverem, descubra quais são.

37. Dada a função quadrática $f(x)=2x^2-x-3$, determine:

- se a concavidade da parábola definida pela função está voltada para cima ou para baixo;
- os zeros da função;
- o vértice da parábola definida pela função;
- a interseção com o eixo x ;
- a interseção com o eixo y ;
- o eixo de simetria;
- $Im(f)$;
- o esboço do gráfico.

Função composta

38. Se $f(x)=\sqrt{x}$ e $g(x)=\sqrt{2-x}$, encontre cada uma das funções e seus domínios.

a) $f \circ g$

b) $g \circ f$

c) $f \circ f$

d) $g \circ g$

39. Encontre $f \circ g \circ h$.

a) $f(x)=3x-2, g(x)=\text{sen } x,$

$h(x)=x^2$

b) $f(x)=\sqrt{x-3}, g(x)=x^2,$

$h(x)=x^3+2$

3 POLINÔMIOS

3.1 DEFINIÇÃO

O Polinômio é expresso de toda forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

em que:

- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ são números complexos (C) chamados coeficientes;
- $n \in \mathbb{N}^*$;
- o maior valor do expoente de x, com coeficiente não nulo, é denominado grau do polinômio.

Exemplos:

a) $\sqrt{4}x^6 + 2x^2 + 9$: possui grau 6 (polinômio de 6º grau).

b) $-2x^4 + (3-i)x$: possui grau 4 (polinômio de 4º grau).

Conforme a definição, **não** são consideradas expressões polinomiais:

c) $x^{-5} + 6$, pois o expoente $-5 \notin \mathbb{N}$

d) $x^{-\frac{2}{7}} + 3x$, pois o expoente $-\frac{2}{7} \notin \mathbb{N}$.

Observação: É possível perceber que $\frac{1}{x^5} + 6$ e $\sqrt[7]{x^2} + 3x$ e são representações idênticas ao exemplo c) e d), respectivamente. Portanto, também não são consideradas exemplos de polinômios.

3.2 REPRESENTAÇÃO

Seja $p(x)$ um polinômio de 2º grau, portanto:

$$p(x) = 2x^2 + 8.$$

É perceptível semelhança com a notação de função, já que esta expressão representa uma função polinomial de 2º grau.

Sendo $p(x)$ um polinômio de grau n, a representação do grau da expressão polinomial é:

$$\text{gra}(p) = n$$

3.3 VALOR NUMÉRICO DE UM POLINÔMIO

O valor numérico de um polinômio $p(x)$ é o valor encontrado quando é dado um valor para $x \in \mathbb{C}$.

Exemplo:

O valor numérico de $p(x) = x^2 - 2x + 6$ para $x = 3$ é

$$p(3) = 3^2 - 2(3) + 6 = 9 - 6 + 6 = 9.$$

Logo, $p(3) = 9$.

3.3.1 POLINÔMIO IDENTICAMENTE NULO

Quando o valor numérico de um polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

é nulo para todo x possível, identificamos o polinômio como identicamente nulo. Contudo, isso só é possível se $a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$. Temos, então:

$$p(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{C} \text{ (para qualquer valor de } x \text{ nos complexos.)}$$

Portanto, como todos os coeficientes do polinômio são nulos, **não** é definido grau para ele.

3.3.2 RAIZ DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL

É dito que x é raiz de um polinômio se

Exemplo:

Seja $p(x) = 2x^2 - 14x + 20$, temos:

$$\begin{aligned} p(5) &= 2(5^2) - 14(5) + 20 \\ &= 50 - 70 + 20 = 0. \end{aligned}$$

Logo, 5 é raiz de $p(x)$.

$$\begin{aligned} p(3) &= 2(3^2) - 14(3) + 20 \\ &= 18 - 42 + 20 = -4. \end{aligned}$$

Logo, 3 não é raiz de $p(x)$.

3.4 IGUALDADE DE POLINÔMIOS

Dois polinômios são iguais se, e somente se, seus valores numéricos forem iguais para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Assim:

$$p(x)=g(x) \Leftrightarrow p(\alpha)=g(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

Somente será possível se, dados $p(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots+c$ e $g(x)=dx^n+ex^{n-1}+\dots+f$, tivermos:

$$a = d, b = e, \dots, c = f$$

Exemplo:

Dados os polinômios $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ e $g(x)=3x^3+6x^2-5x+4$, temos que $p(x) = g(x)$ se, e somente se, $a = 3, b=6, c = -5$ e $d = 4$.

3.5 OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

Sejam, $p(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots+c$, $g(x)=dx^n+ex^{n-1}+\dots+f$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos:

a) Adição

$$p(x)+g(x)=(a+d)x^n+(b+e)x^{n-1}+\dots+(c+f)$$

b) Subtração

$$\begin{aligned} p(x)-g(x) &= \\ p(x)+(-g(x)) &= \\ (a-d)x^n+(b-e)x^{n-1}+\dots+(c-f) & \end{aligned}$$

c) Produto por escalar

$$y \cdot p(x) = yx^n + ybx^{n-1} + \dots + yc$$

d) Produto de polinômios

$$\begin{aligned} p(x) \cdot g(x) &= \\ (ax^n+bx^{n-1}+\dots+c) \cdot (dx^n+ex^{n-1}+\dots+f) & \end{aligned}$$

É aplicado a distributiva para resolver o problema.

Exemplos:

Sejam $p(x)=4x^2+3x-2$ e $g(x)=-2x^3+5x^2-3x-6$, então:

$$I) p(x)+g(x)=4x^2+3x-2-2x^3+5x^2-3x-6=-2x^3+9x^2-8$$

$$II) p(x)-g(x)=$$

$$4x^2+3x-2-(-2x^3+5x^2-3x-6)=$$

$$4x^2+3x-2+2x^3-5x^2+3x+6=$$

$$2x^3-x^2+6x+4$$

$$III) 3 \cdot p(x)=3(4x^2+3x-2)=12x^2+9x-6$$

IV) Dados $p(x)=2x-1$ e $g(x)=-3x+4$, temos

$$p(x) \cdot g(x)=(2x-1)(-3x+4)=-6x^2+8x+3x-4=-6x^2+11x-4$$

Observações: Sejam $gr(p)$ = grau de $p(x)$ e $gr(g)$ = grau de $g(x)$.

Então:

$$I) gr(p \pm g) \leq \text{maior valor entre } gr(p) \text{ e } gr(g).$$

$$II) gr(p \cdot g) = gr(p) + gr(g).$$

3.5.1 DIVISÃO DE POLINÔMIOS

Dividindo um polinômio $p(x)$ por $f(x)$, um polinômio não nulo, encontra-se dois polinômios $q(x)$ e $s(x)$ tal que:

$$I) p(x)=f(x) \cdot q(x)+s(x);$$

$$II) gr(s) < gr(f).$$

3.5.1.1 MÉTODO DAS CHAVES

É uma técnica é semelhante ao empregado na divisão de números inteiros. Vejamos um exemplo, conforme a figura 1:

$1^{\circ}) \quad x^2 - 5x + 6 \left \begin{array}{l} x - 3 \\ \hline x \\ \hline x^2 : x = x \end{array} \right.$	$3^{\circ}) \quad x^2 - 5x + 6 \left \begin{array}{l} x - 3 \\ \hline -x^2 + 3x \\ \hline -2x + 6 \\ \hline -2x : x = -2 \end{array} \right.$
$2^{\circ}) \quad x^2 - 5x + 6 \left \begin{array}{l} x - 3 \\ \hline -x^2 + 3x \\ \hline -2x + 6 \end{array} \right.$ <p style="margin-left: 20px;">$x(x - 3) = x^2 - 3x$</p> <p style="margin-left: 20px;">Trocando o sinal: $-x^2 + 3x$</p>	$4^{\circ}) \quad x^2 - 5x + 6 \left \begin{array}{l} x - 3 \\ \hline -x^2 + 3x \\ \hline -2x + 6 \\ \hline 2x - 6 \\ \hline 0 \end{array} \right.$ <p style="margin-left: 20px;">$-2(x - 3) = -2x + 6$</p>

Figura 3 - Método das chaves

Verifica-se que:

$$p(x) = f(x) \cdot q(x) + s(x)$$

$$\underbrace{x^2 - 5x + 6}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{(x - 3)}_{\text{Divisor}} \underbrace{(x - 2)}_{\text{Quociente}} + \underbrace{0}_{\text{Resto}}$$

3.5.1.2 DIVISÃO POR (x-a): DISPOSITIVO PRÁTICO DE BRIOT-RUFFINI

Briot-Ruffini é um método que facilita o processo de divisão por polinômios do tipo x-a, em que a é uma constante. O esquema dessa ferramenta é mostrado abaixo:

Termo constante do divisor com sinal trocado	Coeficientes de x do dividendo p(x)	Termo constante do dividendo p(x)
	Coeficientes do quociente	Resto

A seguir um exemplo de aplicação do dispositivo na divisão de $p(x)$ por $f(x)$.

$p(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ por $f(x) = x - 2$.

1º - Monta-se o esquema, conforme figura 2.

$$1^{\circ}) \begin{array}{r|rrrr|r} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \end{array}$$

Figura 4- Primeiro passo

2º - Repete-se o primeiro coeficiente do dividendo, conforme figura 2.

$$2^{\circ}) \begin{array}{r|rrrr|r} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ & \downarrow & & & \\ & 3 & & & \end{array}$$

Figura 5- Segundo passo

3º - Multiplica-se o termo repetido pelo divisor e soma-se o produto com o próximo termo do dividendo.

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ & \downarrow & \rightarrow 6 + (-5) & & \\ & 3 & 1 & & \end{array}$$

Figura 6 - Terceiro passo

$$3 \cdot 2 = 6 \text{ e } 6 + (-5) = 1$$

4º - Repete-se o processo para obter o novo termo do quociente.

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ & \downarrow & \rightarrow 6 + (-5) & \rightarrow 2 + 1 & \\ & 3 & 1 & 3 & \end{array}$$

Figura 7 - Quarto passo

$$1 \cdot 2 = 2 \text{ e } 2 + 1 = 3$$

5º Realiza-se o processo novamente para encontrar o resto da divisão

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ & \downarrow & \rightarrow 6 + (-5) & \rightarrow 2 + 1 & \rightarrow 6 + (-2) \\ & 3 & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

Figura 8 - Quinto passo

$$3 \cdot 2 = 6 \text{ e } 6 + (-2) = 4$$

Pelo esquema, tem-se:

$$q(x) = 3x^2 + x + 3$$

$$s(x) = 4$$

Portanto:

$$3x^3 - 5x^2 + x - 2 =$$

$$(x - 2)(3x^2 + x + 3) + 4$$

Observação:

- a) O resto será sempre uma constante na divisão por $x - a$, pois o grau do resto deve ser sempre menor que o do divisor ($x - a$ tem grau 1).
- b) $gr(q(x)) = gr(p(x)) - gr(f(x))$
- c) Se 'a' é raiz do polinômio, portanto o resto da divisão é zero.

3.5.1.3 TEOREMA DE D'ALEMBERT

O teorema de D'Alembert diz que o resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - a$ será $p(a)$.

Com a aplicação do teorema é possível com facilidade verificar se um polinômio $p(x)$ é divisível por $x - a$, pois, se assim for, o resto da divisão será 0, e conforme o teorema, $p(a) = 0$.

3.5.1.4 TEOREMA DO FATOR

Seja d uma raiz de um polinômio $p(x)$, com grau $n > 0$, então $x - d$ é um fator (multiplicativo) de $p(x)$.

De acordo com o Teorema de D'Alembert, a divisão de $p(x)$ por $x - d$ resulta em um quociente $q(x)$ e um resto $p(d)$ tal que,

$$p(x) = (x - d)q(x) + p(d)$$

Porém, como d é uma raiz de p , $p(d) = 0$, tem-se:

$$p(x) = (x - d)q(x)$$

Portanto, $x - d$ é um fator de $p(x)$.

Esse teorema tem relevância pois consiste na possibilidade de escrever um polinômio como um produto de fatores, sendo cada fator da forma $x - \text{raiz de } p(x)$.

4 EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

4.1 DEFINIÇÃO

Equação polinomial é toda equação que pode ser escrita na forma:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ (com $a_n \neq 0$) em que $a_i \in \mathbb{C}$ e n é um número positivo não nulo.

4.2 RAÍZES

Conforme definições anteriores, a raiz de uma equação polinomial é o valor que torna o polinômio nulo. Sendo assim, de acordo com a nova definição de equação polinomial, um valor β será raiz da equação se tornar a igualdade verdadeira:

$$a_n \beta^n + a_{n-1} \beta^{n-1} + \dots + a_2 \beta^2 + a_1 \beta + a_0 = 0.$$

Com o teorema do fator, sabe-se que é possível decompor um polinômio $p(x)$ de grau n ($n \geq 1$) em um produto de n fatores de 1º grau:

$$p(x) = a_n (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) = 0, \text{ sendo } x_1, x_2, \dots, x_n,$$

sendo, raízes de p . Pode-se concluir então que **um polinômio de grau n tem n raízes complexas**, havendo a possibilidade de existir duas ou mais raízes idênticas, ocorrendo a **multiplicidade** m das raízes em questão, sendo m a quantidade de vezes que a raiz se repete.

4.3 RELAÇÕES DE GIRARD

Para facilitar o processo de encontrar as raízes, as relações de Girard fornecem fórmulas que relacionam os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica, pois encontrar as raízes de uma equação polinomial pode demandar certo trabalho.

l) Equação de 2º grau: ax^2+bx+c

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

II) Equação de 3º grau: ax^3+bx^2+cx+d

$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3 &= -\frac{b}{a} \\x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 &= \frac{c}{a} \\x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a}\end{aligned}$$

Para encontrar as raízes basta resolver o sistema de equações. Podendo ser realizado mentalmente às vezes no caso de uma equação quadrática, por exemplo.

Observações:

I) Partindo de $-\frac{b}{a}$, O lado direito da igualdade troca o sinal de $-$ para $+$, obtendo,

$$-\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, -\frac{d}{a}, \frac{e}{a} \dots$$

II) As relações existem para um polinômio de grau n qualquer. A equação igualada a $-\frac{b}{a}$ é sempre a soma de todas as raízes combinadas uma a uma; o termo igual a $\frac{c}{a}$ é igual a soma da combinação dois a dois das raízes; $-\frac{d}{a}$ é igual à soma da combinação três a três das raízes e assim sucessivamente.

4.4 PESQUISA DE RAÍZES RACIONAIS

Dado um polinômio

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

com todos os coeficientes inteiros, sendo o número racional, com r e s primos entre si, é raiz dessa equação, então r é divisor de a_0 e s é divisor de a_n .

Exemplo: Pesquise as raízes racionais da equação $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$

Resolução:

Temos $a_0 = 2$ e $a_n = 3$

r é divisor de 2 $\rightarrow r \in \{-1, 1, -2, 2\}$

s é divisor de 3 $\rightarrow s \in \{-1, 1, -3, 3\}$

Então, pela propriedade, as possíveis raízes são:

$$\frac{p}{q} \in \left\{ -1, 1, -2, 2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}$$

Por tentativa, verifica-se que 1 é raiz do polinômio. Foi usado então o teorema de Briot-Ruffini, dividindo o polinômio por $x - 1$ e obteve-se a seguinte igualdade:

$$3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = (3x^2 + 5x - 2)(x - 1)$$

Encontrando as raízes da equação de segundo grau encontra-se as raízes que restam do polinômio inicial. Omitida tal etapa, as raízes da equação quadrática são $\frac{1}{3}$ e -2 . Completando o conjunto solução:

$$S = \{-2, \frac{1}{3}, 1\}$$

Todas as raízes encontradas são números racionais e estão dentro do espaço amostral das possíveis raízes.

EXERCÍCIOS

Grau e igualdade de polinômios

1. (Mack-SP-2010) Determine $m \in \mathbb{R}$ para que o polinômio $p(x) = (m-4)x^3 + (m^2-16)x^2 + (m+4)x + 4$ seja de grau 2.
2. (FEI, SP-2009) Determine os valores de a, b e c sabendo que

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}$$

3. (Mack-SP, 2009) Calcule os valores de m, n e l para os quais o polinômio $p(x) = (2m-1)x^3 - (5n-2)x^2 + (3-2l)x$ é nulo.
4. (DANTE, 2013) Calcule os valores de a, b e c para que o polinômio $p_1(x) = a(x+c)^3 + b(x+d)$ seja idêntico a $p_2(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$

Divisão de polinômios

5. (DANTE, 2013) Sejam $p(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 10x - 24$ e $h(x) = x^2 - 6x + 5$. Efetue a divisão $\frac{p(x)}{h(x)}$.
6. (DANTE, 2013) Calcule os valores de m e n para que seja exata a divisão do polinômio $p(x) = 2x^3 + mx^2 + nx - 1$ por $h(x) = 2x^2 - x - 1$.
7. (DANTE, 2013) Dividindo $p(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 3$ por certo polinômio $h(x)$, obtemos o quociente $q(x) = x - 1$ e o resto $r(x) = 2x - 1$. Determine o polinômio $h(x)$.

8. (DANTE, 2013) Sabendo que o polinômio $p(x)=x^3-6x^2+3x+10$ é divisível por $h(x)=x-2$, resolva a equação: $x^3-6x^2+3x+10=0$.

Dispositivo Briot-Ruffini

9. (DANTE, 2013) Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, calcule o quociente e o resto da divisão de:

a) $p(x)=x^4+3x^2+x-5$ por $h(x)=x+2$

b) $p(x)=5x^2-3x+2$ por $h(x)=x+3$

c) $p(x)=2x^3-7x^2+2x+1$ por $h(x)=x-4$

d) $p(x)=2x^3-3x^2+x+2$ por $h(x)=2x-1$

10. (DANTE, 2013) Calcule o valor de a , sabendo que $p(x)=2x^3+ax^2+(2a+1)x+a+3$ é divisível por $x+4$.

11. (PUC, SP) Determine os valores de a e b para que o polinômio $p(x)=x^3+ax+b$ seja divisível por $g(x)=(x-1)^2$.

Teorema de D'Alembert

12. (DANTE, 2013) Verifique se o polinômio $g(x)=x^2-3x+2$ é divisível por $x+3$.

13. (DANTE, 2013) Determine b e c de modo que o polinômio $p(x)=x^4+x^2+bx+c$ seja divisível por $h(x)=x-2$, mas quando dividido por $g(x)=x+2$, deixe o resto igual a 4.

14. Considere o polinômio $p(x)=3x^3+2x^2-12x+k$ e responda:

a) Se -2 é raiz de $p(x)$, qual é o valor de k ?

b) Se $k = 1$, qual é o resto da divisão de $p(x)$ por $x - 3$?

Teorema do fator

15. Determine os valores de m e n na função dada $p(x)=2x^4-x^3+mx^2-nx+2$ para que o polinômio seja divisível por $(x-2)(x+1)$.

Raízes de um polinômio

16. (DANTE, 2013) Resolva $x^4-2x^3+x^2+2x-2=0$ sabendo que duas de suas raízes são -1 e 1 .

17. De acordo com o polinômio $f = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x+1 & -2 & x-1 \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix}$, determine:

a) as raízes de f .

b) o quociente e o resto da divisão de f por x^2-1 .

18. Calcule os valores de a e b , sabendo que o número 2 é raiz de dupla. $ax^3+bx+16=0$.

19. (DANTE, 2013) Determine uma equação polinomial do 3º grau com $S = \{3,5\}$, em que 3 é raiz de multiplicidade 2.

Relações de Girard

20. Calcule o valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, sabendo que os números a, b e c são raízes da equação $x^3-2x^2+3x-4=0$.

21. Determine as raízes da equação, sabendo que uma das raízes é dupla, $x^3-3x-2=0$.

22. Calcule o valor de $\log\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, sabendo que os números a, b e c são as raízes da equação $x^3+x-1=0$.

23. Sabendo-se que o produto das raízes é 1, calcule as raízes da equação algébrica $x^3-16x^2+23x-6=0$.

Pesquisa de raízes

24. Determine as raízes da equação $3x^3-13x^2+13x-3=0$?

25. Calcule as raízes da equação cúbica $x^3-2x^2-3x+6=0$.

26. Determine as raízes inteiras da equação $x^3+4x^2+2x-4=0$?

5 RADICIAÇÃO E POTENCIAÇÃO

5.1 DEFINIÇÕES

POTENCIAÇÃO: indica a multiplicação de fatores iguais. O símbolo a^n , sendo a um número inteiro e n um número natural maior que 1, significa o produto de n fatores iguais a a :

$$\underbrace{a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

Onde: a é a base e n é o expoente.

Por definição temos que:

RADICIAÇÃO: é a operação inversa da potenciação.

$${}^n\sqrt{a} = b \Rightarrow b^n = a, a \geq 0$$

Onde: n é o índice do radical e a é o radicando.

5.2 PROPRIEDADES

POTENCIAÇÃO

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$m\sqrt[n]{a} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \text{ com } b \neq 0$$

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

RADICIAÇÃO

$$n\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$n\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

$$n\sqrt[n]{a \cdot b} = n\sqrt[n]{a} \cdot n\sqrt[n]{b}$$

$$n\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{n\sqrt[n]{a}}{n\sqrt[n]{b}}, \text{ com } b \neq 0$$

$$n\sqrt[n]{a^m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = (n\sqrt[n]{a})^m$$

$$n\sqrt[n]{m\sqrt[n]{a}} = n \cdot m \sqrt[n]{a}$$

5.3 RACIONALIZAÇÃO

Racionalizar é uma fração com denominador irracional é encontrar uma fração que seja equivalente, porém com denominador racional. Para isso, é necessário multiplicar tanto o denominador quanto o numerador por um número conveniente. De forma resumida, racionalizar uma fração é eliminar do denominador o radical.

6 PRODUTOS NOTÁVEIS

Produtos notáveis são expressões algébricas que possuem uma equação geral para a sua resolução. O conhecimento dessas fórmulas auxilia e minimiza o desenvolvimento de vários problemas matemáticos.

PRODUTO DA SOMA:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$$

Exemplo:

$$(2x+5)^2=4x^2+20x+25$$

PRODUTO DA DIFERENÇA:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$$

Exemplo:

$$(2x-5)^2=4x^2-20x+25$$

PRODUTO DE UMA SOMA POR UMA DIFERENÇA:

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab+b^2=a^2-b^2$$

Exemplo:

$$(5x+3)(5x-3)=25x^2-9$$

CUBO DA SOMA:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2) = \\ a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 &= \\ a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 &= \end{aligned}$$

Exemplo:

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

CUBO DA DIFERENÇA:

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 = \\ &= (a-b)(a^2-2ab+b^2) = \\ a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3 &= \\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 &= \end{aligned}$$

Exemplo:

$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

7 FATORAÇÃO

Fatoração é transformar uma expressão algébrica em um produto de fatores, ou seja, é um processo inverso ao produto notável, que consiste de fórmulas mais simples para resolver uma equação.

1º Caso: Termo em Evidência

$$ba^3+ab^3$$

Na equação existe um fator que se repete em ambos os termos, ou seja, **ab** é o fator que se repete. Portanto, temos:

$$\begin{aligned}ba^2+ab^2 &= (ab)a+(ab)b \\ &= ab(a+b) \end{aligned}$$

Exemplo:

$$3a+9=3(x+3)$$

2º Caso: Agrupamento

Observe o exemplo abaixo:

Exemplo:

$$-5b+ab+10a-50$$

Como não há um fator comum entre os quatro termos, podemos agrupar a expressão em duas outras de forma que os termos fiquem em evidência.

$$\begin{aligned} -5b+ab+10a-50 &= \\ (ab+10a)-(5b+50) &= \\ a(b+10)-5(b+10) &= \\ (a-5)(b+10) & \end{aligned}$$

3º Caso: Trinômio

Em produtos notáveis, vimos que o quadrado da soma ou da diferença possui resultados do tipo , que é um trinômio quadrado perfeito.

A fatoração de trinômio quadrado perfeito pode ser realizada conhecendo-se o processo de obtenção de um trinômio. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo:

$$\begin{aligned} 81x^2-36xy+4y^2 &= \\ (9x)^2-2(9x)(2y)+(2y)^2 &= \\ (9x-2y)^2 & \end{aligned}$$

4º Caso: Diferença de dois quadrados

Para fatorar a diferença de dois quadrados, deve-se utilizar o processo inverso do produto da soma pela diferença.

Exemplo:

$$4x^2-81=(2x-9)(2x+9)$$

5º Caso: Soma de dois cubos

Observe o que acontece se desenvolvermos o seguinte produto:

$$\begin{aligned} (a+b)(a^2-ab+b^2) &= \\ a^3-a^2b+ab^2+ba^2-ab^2+b^3 &= \\ a^3+b^3 & \end{aligned}$$

O processo inverso é a fatoração da soma de dois cubos.

Exemplo:

$$8a^3+1=(2a)^3+(1)^3=$$

$$(2a+1)(4a^2-2a+1^2)$$

6º Caso: Diferença de dois cubos

Utilizando raciocínio semelhante ao anterior temos:

$$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$=a^3+a^2 b+ab^2-ba^2-ab^2-b^3$$

$$a^3-b^3$$

Exemplo:

$$3x^3-7=(\sqrt[3]{3} x)^3-(\sqrt[3]{7})^3=$$

$$(\sqrt[3]{3} x-\sqrt[3]{7})(\sqrt[3]{9} x^2+\sqrt[3]{21} x+\sqrt[3]{49})$$

7º Caso: Expressões quadráticas

Com os conhecimentos adquiridos no capítulo de polinômios, pode-se decompor um polinômio em um produto de polinômios de grau 1 da forma (x-raiz do polinômio). Para tanto, é necessário a utilização das relações de Girard para encontrar tais raízes.

$$-\frac{b}{a}=(x_1+x_2) \text{ e } \frac{c}{a}=x_1 x_2$$

Exemplo:

$$x^2-8x+15$$

Devemos encontrar dois números cuja soma resulte em 8 e cujo produto resulte em 15. Esses números são o -3 e -5, portanto:

$$x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$$

Nota: a fatoração de uma expressão quadrática facilita bastante a determinação de suas raízes. No exemplo anterior, é fácil verificar que para $x = 3$ e $x = 5$ a equação é igual a zero e, portanto, as raízes da expressão são 3 e 5 evitando a utilização de métodos mais complexos.

8 COMPLETAR QUADRADOS

Observe o exemplo a seguir:

$$x^2-4x-1=0$$

A expressão anterior não é um quadrado perfeito e não pode ser escrita na forma $(x \pm b)^2$. Entretanto, pode-se adicionar um termo em ambos os membros da expressão de forma que o termo da esquerda seja um quadrado perfeito. Lembrando que um quadrado é sempre na forma $x^2 \pm 2bx + b^2$, tem-se, então:

$$\begin{aligned}x^2 - 4x - 1 &= 0 \\ \rightarrow x^2 - 2(2)x - 1 &= 0\end{aligned}$$

É necessário adicionar b^2 em ambos os membros, nesse caso, $b=2$.

$$\begin{aligned}\rightarrow x^2 - 2(2)x - 1 &= 0 \\ \rightarrow x^2 - 2(2)x - 1 + 4 &= 0 + 4 \\ \rightarrow x^2 - 4x + 4 &= 5 \\ \rightarrow (x-2)^2 &= 5 \\ \rightarrow (x-2)^2 - 5 &= 0\end{aligned}$$

Esse tipo de simplificação pode facilitar o desenvolvimento de alguns cálculos.

Desafio 1: Utilizando os conhecimentos de fatoração, produtos notáveis e completar quadrados, fatore a expressão $a^4 + a^2 b^2 + b^4$, na forma do produto de uma soma por uma diferença.

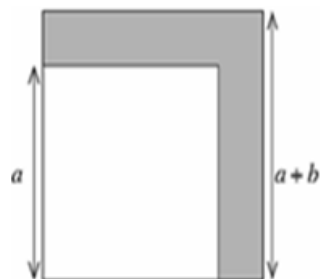
Desafio 2: Se $(a + b + c) = 1$ e $(a^2 + b^2 + c^2) = 0$ prove que $A = a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}$

EXERCÍCIOS

1. A igualdade verdadeira para quaisquer números a e b reais é:

- a) $(a - b)^3 = a^3 - b^3$
- b) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$
- c) $(a + b)(a - b) = a^2 + b^2$
- d) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
- e) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

2. (OBMEP) Na figura abaixo temos dois quadrados. O quadrado maior tem lado de valor $a + b$ e o menor lado a . Qual é a área da região pintada?



- a) b^2
- b) $a + b$
- c) $a^2 + 2ab$
- d) $2ab + b^2$

3. (DANTE, 2013) Considerando as identidades de produtos notáveis, calcule os valores numéricos racionais mais simples das expressões:

a) $(57,62)^2 - (42,38)^2$;

b) $\cos^6 15^\circ - \sin^6 15^\circ$.

4. Se o polinômio $f=2x^2-12.2^{0,5}x+4k$ é tido como um quadrado perfeito, então a constante real k é um número:

a) quadrado perfeito.

b) cubo perfeito.

c) irracional.

d) divisível por 8.

e) primo.

5. Sabe-se que $a^2 - 2bc - b^2 - c^2 = 40$ e que a igualdade $a - b - c = 10$ com a, b e c números reais. Então o valor de $a + b + c$ é igual a:

a) 1

b) 2

c) 4

d) 10

e) 20

6. O resultado da expressão numérica $N = 2002^2 \times 2000 - 2000 \times 1998^2$ é igual a

a) 2×10^6

b) 4×10^6

c) 8×10^6

d) 16×10^6

e) 32×10^6

7. (DANTE, 2013) Qual é o fator comum a todos os termos do polinômio $18x^2y^8 - 36x^9y^9 + 24x^3y^5$:

8. (DANTE, 2013) Sabendo-se que $p + q = 4$ e $pq = 5$, então o valor de $E = p^3 + q^3 + p^2q + pq^2$ é:

9. (DANTE, 2013) Fatore a seguinte expressão $64x^6 - 441y^6$:

10. (DANTE, 2013) A forma simplificada da razão entre os polinômios $x^3 - 8y^3$ e $x^2 - 4xy + 4y^2$ é:

a) $\frac{(x + 4y)^2}{x - 4y}$

b) $\frac{x^2 + 2xy + 4y^2}{x - 2y}$

c) $\frac{(x + y)^2}{x - y}$

d) $\frac{(2x + 2)^2}{x - y}$

e) $\frac{(x + y)^2}{2x - y}$

11. (ITA, 2008) A área do polígono, situado no primeiro quadrante, que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0\}$, é igual a:

a) $\sqrt{6}$

b) $5/2$

c) $2\sqrt{2}$

d) 3

e) $10/3$

12. Calcule o valor da expressão numérica $[10^2 + 20^2 + 30^2 + \dots + 100^2] - [9^2 + 19^2 + 29^2 + \dots + 99^2] =$

13. Seja a igualdade $a^{1/2} + a^{-1/2} = 10/3$, então $a + a^{-1}$ é igual a:

a) $100/9$

b) $82/3$

c) $82/9$

d) $100/82$

e) $16/9$

14. (Unesp, 2010) Por hipótese, considere $a = b$.

Multiplique ambos os membros por a

$a^2 = ab$.

Subtraia de ambos os membros b^2

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

Fatore os termos de ambos os membros

$$(a + b)(a - b) = b(a - b)$$

Simplifique os fatores comuns

$$(a + b) = b$$

Use a hipótese que $a = b$

$$2b = b$$

Simplifique a equação e obtenha

$$2 = 1$$

A explicação para isto é:

- a) a álgebra moderna quando aplicada à teoria dos conjuntos prevê tal resultado.
- b) a hipótese não pode ser feita, pois como $2 = 1$, a deveria ser $(b + 1)$.
- c) na simplificação dos fatores comuns ocorreu divisão por zero, gerando o absurdo.
- d) na fatoração, faltou um termo igual a $-2ab$ no membro esquerdo.
- e) na fatoração, faltou um termo igual a $+2ab$ no membro esquerdo.

15. Manipulando a expressão abaixo a seguir, obtem-se:

$$(a^2 b + ab^2) \frac{a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$$

- a) $a + b$
- b) $a^2 + b^2$
- c) ab
- d) $a^2 + ab + b^2$
- e) $b - a$

16. (Ufam) Se $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 30$, então $2x \cdot y$ é igual a:

- a) 0
- b) 15
- c) 6
- d) $5/2$
- e) $5/3$

17. (DANTE, 2013) Uma expressão equivalente a $\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2}$, para $a > 0$ e $b > 0$, é:

- a) $\frac{a+b}{ab}$
- b) $\frac{(a+b)^2}{ab}$
- c) $\left(\frac{a+b}{ab}\right)^2$
- d) $a^2 + b^2 + 2ab$
- e) $a + b + 2$

18. (DANTE, 2013) Simplificando a expressão $\frac{(x+y)^3 - 2(y+x)^3}{x^2 + y^2}$, temos:

- a) $\frac{(x+y)^2}{x-y}$
- b) $x - y - 2yx^2$
- c) $x + y$
- d) $x - y$
- e) $\frac{x^2 + y^2}{x - y}$

Supor: $x \neq y$; $x \neq -y$

19. (DANTE-2013) A fração $\frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 4x + 1}$ é equivalente a:

- a) $\frac{2x - 1}{2x + 1}$
- b) $\frac{2x + 1}{2x - 1}$
- c) $\frac{-1}{4x}$
- d) $\frac{-1}{4x + 1}$

20. Fatorar a expressão $a^2 - b^2 - a + b$?

- a) $(a + b).(a - b + 1)$
- b) $(a - b).(a - b + 1)$
- c) $(a - b).(a + b - 1)$

d) $(a + b).(a - b - 1)$

e) $(a - b).(a - b - 1)$

21. Supondo que $x - \frac{1}{x} = 2$ determine o valor da seguinte expressão $x^2 + \frac{1}{x^2} + x^3 + \frac{1}{x^3}$ é:

a) 27

b) 47

c) 36

d) 11

e) 63

22. Considerando que x é um número real estritamente positivo tem-se que a seguinte expressão $\sqrt{x^2 + x^{-2} + 2} - 2$ é equivalente a:

a) $x^2 - 1$

b) $\frac{(x - 1)^2}{x}$

c) $\frac{x^2 - 1}{x}$

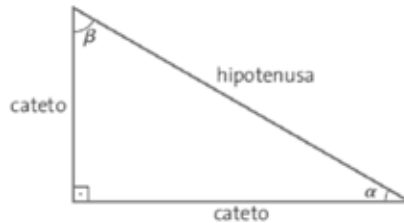
d) $\frac{(x+1)^2}{x}$

e) $(x-1)^2 - \sqrt{2}$

9 TRIGONOMETRIA

9.1 O TRIÂNGULO RETÂNGULO

Em um triângulo retângulo, o maior lado é a hipotenusa (lado oposto ao ângulo de 90°) e os outros dois lados são os catetos.



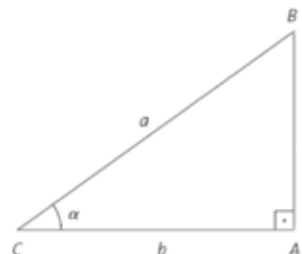
Esses catetos recebem nomes diferentes quando tomamos um ângulo como referência. Vejamos no triângulo abaixo:



Analisando o ângulo \hat{B} , o cateto “colado a ele” (lado c) é o cateto adjacente e o cateto “de frente pra ele” (lado b), o oposto. Referente ao ângulo \hat{C} , b é o cateto adjacente e c o cateto oposto. Portanto, a hipotenusa independe do ângulo que tomamos para análise, mas os catetos não.

9.2 SENO, COSSENO E TANGENTE NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Inicialmente podemos definir algumas relações trigonométricas importantes nesse triângulo:



Define-se o seno do ângulo como a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo pela medida da hipotenusa, isto é:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

Em relação ao cosseno do ângulo, define-se como a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo pela medida da hipotenusa:

$$\operatorname{cos}\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

A tangente do ângulo é dada pela razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo pela medida do cateto adjacente a:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{a}$$

Existem também as relações entre as razões trigonométricas:

a) *Relação fundamental da trigonometria:*

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

Demonstração

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2 + b^2}{a^2} = 1$$

b) *A tangente*

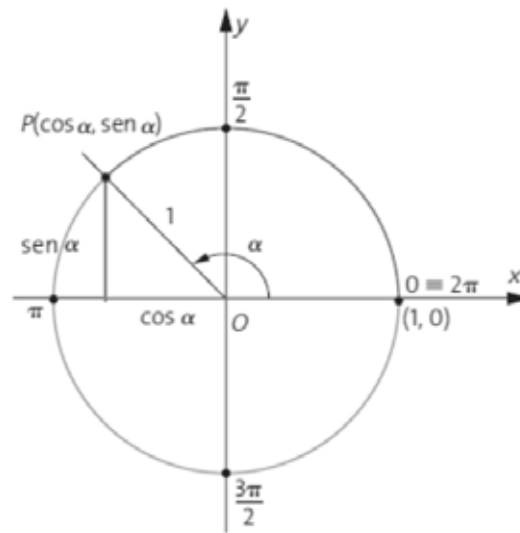
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{cos}\alpha} \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

Demonstração

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{cos}\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \operatorname{tg}\alpha$$

9.3 CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

O círculo trigonométrico é um círculo de raio 1, no qual o eixo x representa o eixo dos cossenos e o eixo y, o eixo dos senos. Analisando um ponto $P(x,y)$ resultante de um ângulo α rad no sentido anti-horário.



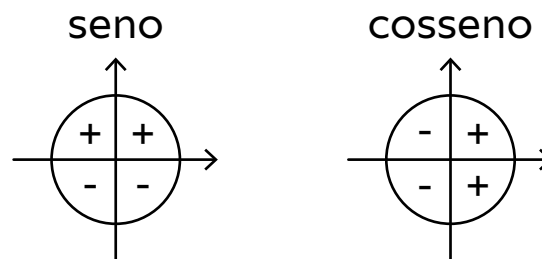
Algumas observações importantes:

- α é positivo quando o sentido de giro é o anti-horário e negativo quando gira no sentido horário;
- a relação fundamental

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

continua válida;

- Em seguida, mostramos os sinais de senos e cossenos por quadrante.



RADIANOS

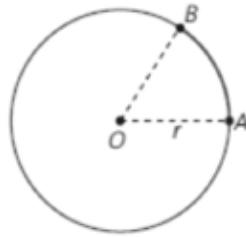
Radianos é uma unidade de medida de ângulo assim como graus. A relação básica de conversão entre tais unidades é

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

Sempre que se quiser fazer uso do círculo para encontrar os valores de seno, cosseno e tangente, é preciso converter os ângulos de graus (β°) para radianos (y rad) usando a regra de três:

$$\frac{180^\circ}{\beta^\circ} = \frac{\pi \text{ rad}}{y \text{ rad}}$$

Além do mais, é a partir do ângulo em radianos que se mede o valor numérico de um arco:



O comprimento de uma corda AB é dado pela igualdade:

$$l = \alpha r,$$

em que r é o raio da circunferência e α , o ângulo em radianos.

9.4 VALORES NOTÁVEIS DE SENO E COSSENO

Os principais valores de seno e cosseno que devemos saber são dados abaixo:

x	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Alguns ângulos têm valores de seno e cosseno facilmente verificados no círculo.

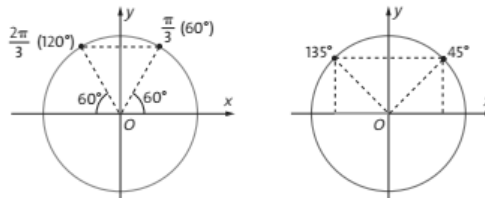
x	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
sen x	1	0	-1	0
cos x	0	-1	0	1

Os valores de tangente podem ser encontrados pela relação $\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$.

9.5. REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

Graças à simetria presente no ciclo trigonométrico podemos obter valores de seno e cosseno para ângulos maiores que 90, ou seja, em todo ciclo trigonométrico. Com base nos valores notáveis, dados na tabela anterior, e utilizando a simetria, tem-se:

9.5.1 ARCOS NO 2º QUADRANTE

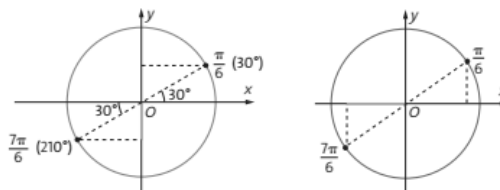


Por análise básica verifica-se que:

$$\text{sen}(\pi-x) = \text{sen } x$$

$$\text{cos}(\pi-x) = -\text{cos } x$$

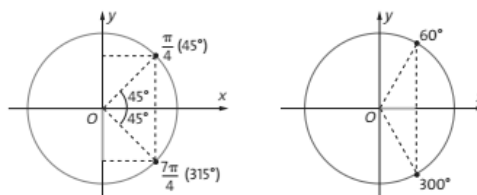
9.5.2 ARCOS NO 3º QUADRANTE



$$\text{sen}(\pi+x) = -\text{sen } x$$

$$\text{cos}(\pi+x) = -\text{cos } x$$

9.5.3 ARCOS NO 4º QUADRANTE



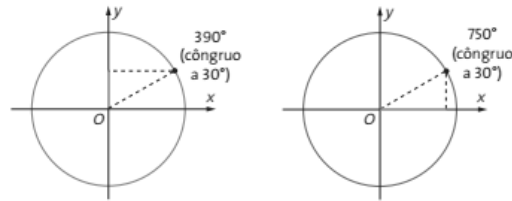
Dante (2013)

$$\text{sen}(2\pi-x) = -\text{sen } x$$

$$\text{cos}(2\pi-x) = \text{cos } x$$

Note que, apesar das fórmulas, todas as reduções são possíveis a partir de análise visual.

9.5.4 ARCOS MAIORES DO QUE 360°

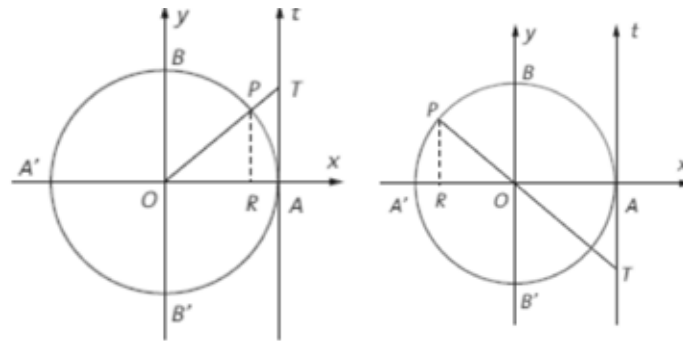


Dante (2013)

Nesse caso, embora o ângulo em questão dê mais de uma volta no círculo, ele continuará pertencendo a algum ponto da circunferência, cairemos, então, em algum dos casos já discutidos.

9.6 TANGENTE

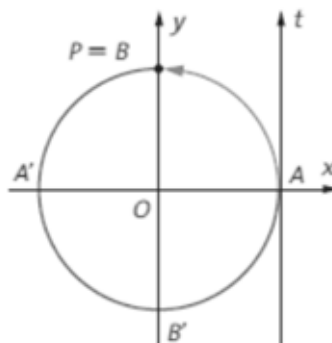
O valor da tangente não está no círculo, mas em uma reta tangente à circunferência. Vejamos:



Marcado o ponto P no círculo, é traçada uma reta ligando-o à origem O. O prolongamento dessa reta que corta a reta t nos dá o valor TA, que representa o valor da tangente do ângulo RÔP.

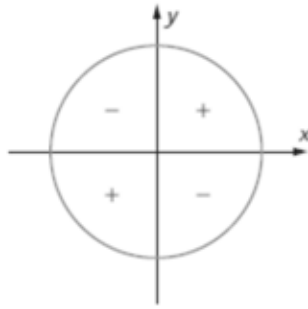
Como a reta t é orientada para cima, a tangente será positiva quando o valor estiver contido na reta t acima do eixo x e negativo, quando abaixo.

Contudo, a tangente não está definida para qualquer ângulo. Vejamos no caso para $x = \frac{\pi}{2}$:



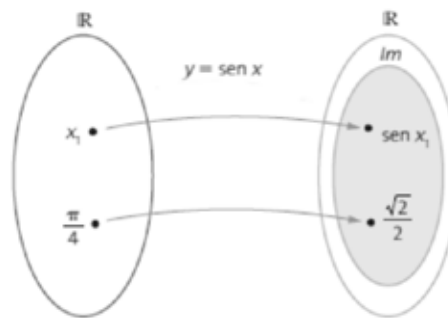
A reta que liga P a O nunca cortará a reta t, pois elas são paralelas, logo, não existe valor de tangente para $x = \frac{\pi}{2}$. O mesmo ocorre para $x = \frac{3\pi}{2}$ (ponto B').

Os sinais para as tangentes são dados abaixo:



9.7 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

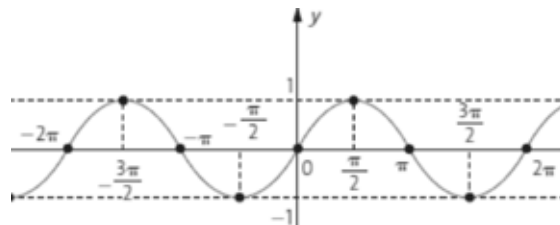
9.7.1 FUNÇÃO SENO



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

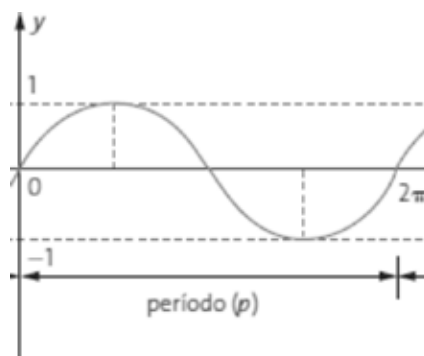
$$x \rightarrow f(x) = \text{sen } x$$

Abaixo, mostra-se o gráfico da função seno:



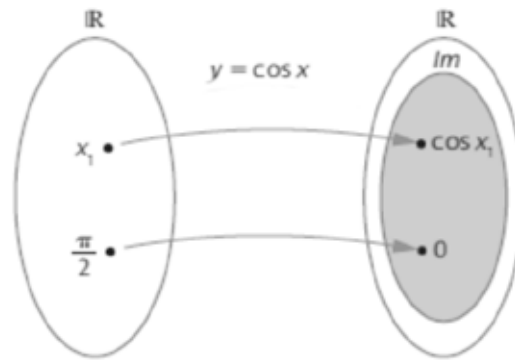
Algumas informações importantes sobre a função seno:

- $D = \mathbb{R}$ e $Im = [-1, 1]$;
- A função não é injetiva nem sobrejetiva;
- A função é ímpar, ou seja, $\text{sen } x = -\text{sen } (-x)$;
- A função tem período $p = 2\pi$, como mostra a figura abaixo:



Observação: Período é o intervalo (no domínio) no qual a função começa se repetir.

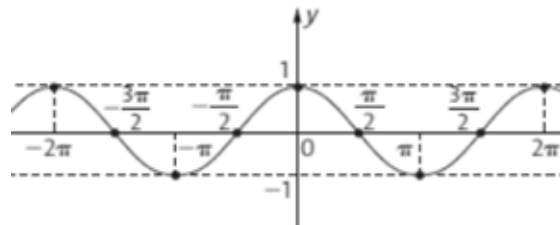
9.7.2 FUNÇÃO COSSENO



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \cos x$$

Segue abaixo o gráfico da função cosseno:



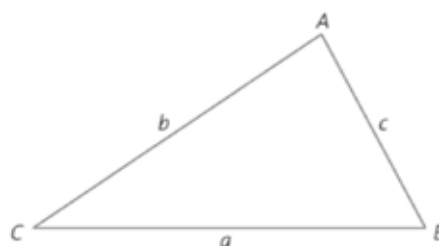
Observações:

- O gráfico da função cosseno é a função seno transladada $\frac{\pi}{2}$ unidades para a direita;
- $D = \mathbb{R}$ e $Im = [-1, 1]$;
- A função não é injetiva nem sobrejetiva;
- A função é par, ou seja, $\cos x = \cos(-x)$;
- O período da função é $p = 2\pi$.

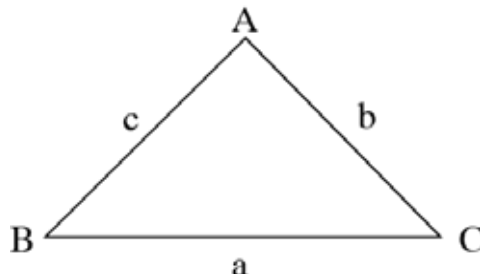
9.8 LEI DOS SENOS E COSENOS

Lei dos senos: em qualquer triângulo ABC, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos, ou seja:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}$$



Lei dos cossenos:



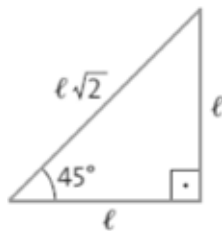
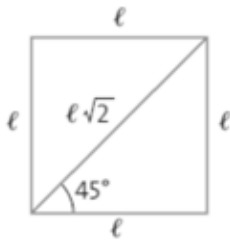
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

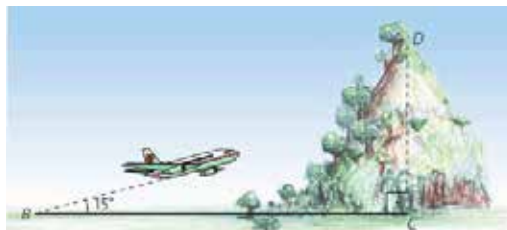
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

EXERCÍCIOS

1. (DANTE-2013) Calcule $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$ e $\operatorname{tg} 45^\circ$, e utilizando o triângulo retângulo destacado do quadrado abaixo:



2. (Cpcar, 2002) Um avião decola de um ponto B sob inclinação constante de 15° com a horizontal. A 2 km de B se encontra a projeção vertical C do ponto mais alto D de uma serra de 600 m de altura, conforme figura.



(Dados: $\cos 15^\circ \cong 0,97$; $\sin 15^\circ \cong 0,26$; $\operatorname{tg} 15^\circ \cong 0,27$)

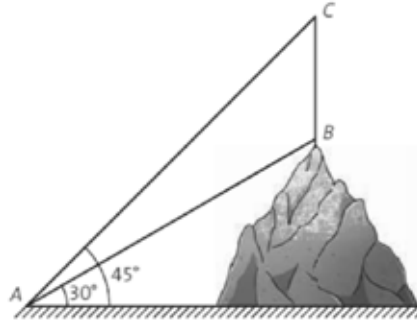
É correto afirmar que:

- não haverá colisão do avião com a serra.
- haverá colisão do avião com a serra antes de alcançar 540 m de altura.
- haverá colisão do avião com a serra em D.
- se o avião decolar 220 m antes de B, mantendo a mesma inclinação, não haverá colisão do avião com a serra.

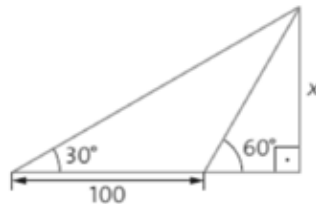
3. (DANTE-2013) De um ponto A no solo, visam-se a base B e o topo C de um bastão colocado verticalmente no alto de uma colina, sob ângulos de 30° e 45° , respectivamente.

Se o bastão mede 4 m de comprimento, a altura da colina, em metros, é igual a:

- a) $\sqrt{3}$
- b) 2
- c) 2
- d) $2(\sqrt{3}+1)$
- e) $2(\sqrt{3}+3)$

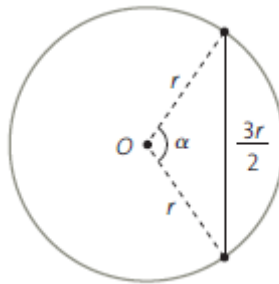


4. (Fuvest-SP) Calcule a medida x indicada na figura abaixo:

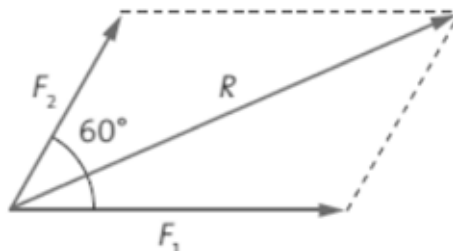


Lei dos senos e cossenos

5. (FCMSCSP) Considerando a figura abaixo, qual o valor de $\sin \alpha$.

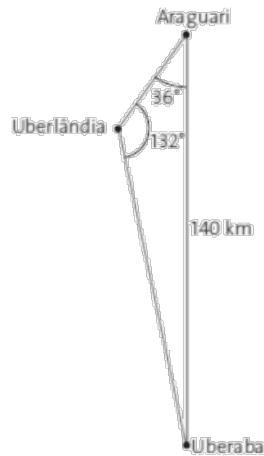


6. (DANTE-2013) Duas forças de intensidade $F_1=8\text{N}$ e $F_2=12\text{N}$ e formam entre si um ângulo de 60° . Qual é a intensidade R resultante dessas duas forças?



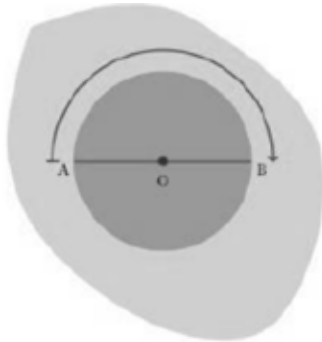
7. (DANTE-2013) Uberaba, Uberlândia e Araguari são cidades do Triângulo Mineiro localizadas conforme a figura a seguir.

A partir dos dados fornecidos, determine a distância aproximada de Uberaba a Uberlândia.



Valor numérico do arco

8. (UFRR) Um grupo de pessoas realizará uma caminhada em torno de uma ilha, de forma circular, saindo do ponto A e chegando ao ponto B (Veja figura a seguir), numa velocidade de 6 metros por minuto. Sabendo-se que O é o centro do círculo e o comprimento do segmento é 300 metros, o tempo necessário para o grupo completar o percurso é de:



Senos, cossenos e tangentes

9. (DANTE-2013) Reduza ao primeiro quadrante e calcule os senos:

a) $\cos \frac{5\pi}{2}$ b) $\cos 315^\circ$ c) $\cos \frac{2\pi}{3}$ d) $\cos 330^\circ$ e) $\cos \frac{5\pi}{4}$ f) $\cos 240^\circ$

10. (DANTE-2013) Reduza ao primeiro quadrante e calcule os cossenos:

a) $\sin \frac{37\pi}{6}$ b) $\sin(-225^\circ)$ c) $\sin 6\pi$ d) $\sin \frac{19\pi}{4}$ e) $\sin 360^\circ$ f) $\sin(-\frac{\pi}{3})$

11. (DANTE-2013) Calcule os valores das tangentes:

a) $\operatorname{tg} 180^\circ$ b) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$ c) $\operatorname{tg}(-\frac{5\pi}{6})$ d) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$ e) $\operatorname{tg} 210^\circ$ f) $\operatorname{tg} 1935^\circ$

10 RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Há determinadas relações entre valores de funções trigonométricas de um mesmo arco que são extremamente importantes para a resolução de problemas matemáticos.

Parte delas deriva da relação fundamental da trigonometria [$\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1$] e outra parte é formada de funções trigonométricas derivadas dos já conhecidos seno, cosseno e tangente. Estas são chamadas de secante (sec), cossecante (cossec) e cotangente (cotg).

Algumas dessas relações são dadas a seguir:

$$(1) \text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$$

$$(2) \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$$

$$(3) \text{cotg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$$

$$(4) \text{sec } x = \frac{1}{\text{cos } x}$$

$$(5) \text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

Além dessas relações, outras podem ser obtidas a partir de manipulações na relação fundamental da trigonometria.

Por exemplo, se dividirmos ambos os lados da equação (1) por ' $\text{sen}^2 x$ ', obtemos a relação:

$$(6) 1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x$$

Já se dividirmos ambos lados da equação (1) por ' $\text{cos}^2 x$ ', chegamos à relação:

$$(7) \text{tg}^2 x + 1 = \text{sec}^2 x$$

10.1 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE ARCOS

É possível demonstrar que a soma e subtração de arcos em funções trigonométricas nem sempre respeitam a forma $f(a+b) = f(a) + f(b)$, sendo 'f' uma função trigonométrica qualquer.

Apesar desse tipo de equação acima nem sempre ser válido, existem algumas regras que valem para soma e subtração de arcos quaisquer em cada função trigonométrica.

Alguns exemplos podem ser conferidos a seguir:

$$(8) \sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$(9) \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$(10) \sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$(11) \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$(12) \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$$(13) \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

10.2 ARCO DUPLO E ARCO METADE

Os arcos duplos são casos especiais da soma de arcos e com o conhecimento obtido até o momento podemos dar a eles fórmulas:

No caso, em $f(a+b)$, $a = b$; então $f(a+b) = f(2.a)$:

$$(14) \sin(2.a) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$

$$(15) \cos(2.a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$(16) \operatorname{tg}(2.a) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

EXERCÍCIOS

1. (DANTE, 2013) A expressão $\frac{\cos^2 \theta}{1 - \operatorname{sen} \theta}$, com $\operatorname{sen} \theta \neq 1$, é igual a:

- a) $\operatorname{sen} \theta$
- b) $\operatorname{sen} \theta + 1$
- c) $\operatorname{tg} \theta \cdot \cos \theta$
- d) 1
- e) $\operatorname{sen} \theta / \sec \theta$

2. (DANTE, 2013) Se $\cos 2x = 0,2$, então $\operatorname{tg}^2 x$ é igual a:

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{2}{3}$
- c) $\frac{3}{4}$
- d) $\frac{4}{3}$
- e) 2

3. (DANTE, 2013) Determine os valores de então $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$ e $\operatorname{cossec} x$, sabendo que $\cos x = \frac{4}{5}$ e que o ângulo encontra-se no 1º quadrante.

4. (DANTE, 2013) Determine o valor de $A = \operatorname{sen} 105^\circ + \cos 105^\circ$.

5. (DANTE, 2013) Se $\operatorname{tg}(x + y) = 33$ e , então é igual a:

- a) 0,2
- b) 0,3
- c) 0,4
- d) 0,5
- e) 0,6

6. (DANTE, 2013) O cosseno do arco de medida 255° é igual a?

7- (DANTE, 2013) Dado $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, determine $\operatorname{sen} 2x$, $\cos 2x$ e $\operatorname{tg} 2x$.

8- (DANTE, 2013) Sabendo que $\operatorname{sen} x + \cos x = 0,2$, determine o valor de $\operatorname{sen} 2x$.

9- (DANTE, 2013) Sabendo que $\operatorname{tg} x = 2$, calcule $\operatorname{tg}(2x)$.

10- (DANTE, 2013) Se $\text{sen } x = -3/4$, x um arco do 4º quadrante, calcule $\cos(2x)$.

11- (DANT, -2013) Se x é um arco de 2º quadrante $\text{sen } x = 5/13$ e , calcule $\text{sen}(2x)$.

12- (DANTE, 2013) Se $\text{sen } x = 3/4$ e x é um arco do 2º quadrante, determine o valor de $\text{sen}(2x)$.

13-(DANTE, 2013) Sabendo que $\cos(2x) = 1/2$, determine o valor de $\text{tg}^2(x) + \text{sec}^2(x)$

11 LIMITES

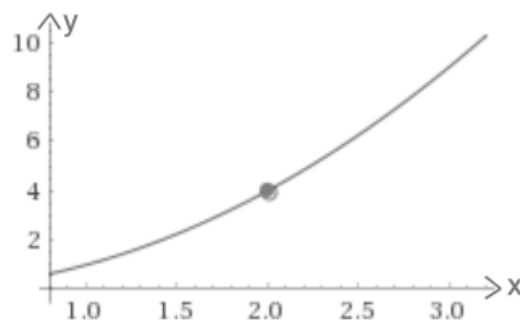
O conceito de limite é utilizado com o objetivo de expor o comportamento de uma função nos momentos de aproximação de determinados valores. O limite de uma função possui grande importância no cálculo diferencial e em outros ramos da análise matemática, definindo derivadas e continuidade de funções.

Para que se entenda o conceito de limite, pode-se analisar o comportamento de uma função $f(x)$ em uma região próxima a um ponto x específico.

Tomemos, por exemplo, a função $f(x) = x^2$ e façamos a análise da mesma no entorno de $x = 2$, ou seja, para valores próximos (menores ou maiores) de 2, mas **diferentes de 2**.

x	f(x)
1,8	3,24
1,9	3,61
1,95	3,8025
1,99	3,9601
2,01	4,0401
2,05	4,2025
2,1	4,4100
2,2	4,84

A partir da análise da tabela, percebe-se que quanto mais os valores de x se aproximam de 2, mais a função se aproxima de 4. Traçando o gráfico da função a partir dos pontos obtidos na tabela acima, temos uma visão próxima do que realmente ocorre:



Neste caso, dizemos que o limite da função $f(x)$ quando x tende a 2 é 4 e a notação mais comum é dada a seguir:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

E, em geral, podemos utilizar a notação

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

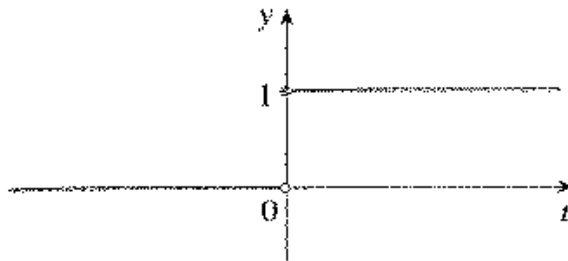
que é lida como “o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L ”. Essa expressão é válida caso seja possível arbitrar valores de $f(x)$ próximos de L , fazendo x suficientemente próximo de a mas não igual a a .

É importante enfatizar que no estudo dos limites, a análise é sempre com $x \neq a$, o que torna possível calcular limites para pontos em que a função nem esteja definida. Ou seja, a única parte relevante é o comportamento da função nas proximidades daquele ponto.

Consideremos agora uma função $h(t)$ definida por partes na forma:

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ 1, & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

O gráfico da função será na forma:



Caso se deseje calcular o limite para a função quando t tende a zero, deve-se analisar o comportamento da função nas proximidades de $t = 0$, para valores menores e maiores que zero.

Com isso, pode-se perceber que para valores de t menores que zero, a função é constante e igual a zero. Já para valores de t maiores que zero, a função é constante e igual a 1. Como não há um único número que t se aproxime quando t se aproxima de zero, podemos dizer que o limite de $h(t)$ quando t tende a zero não existe.

11.1 LIMITES LATERAIS

O limite de $f(x)$ quando x tende a a para valores menores que a é chamado de limite lateral esquerdo.

De forma análoga, o limite de $f(x)$ quando x tende a a para valores maiores que a é chamado de limite lateral direito.

A notação para o limite esquerdo e direito, respectivamente, de $f(x)$ quando x tende a a é:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = e = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Além disso:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Se e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

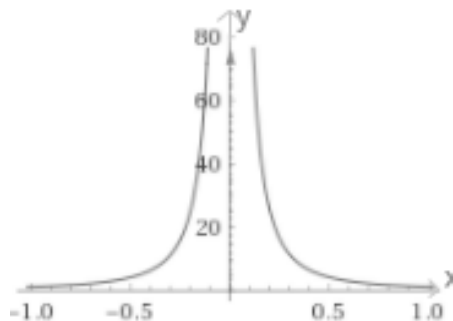
Ou seja, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ só existe quando os limites laterais existem e são iguais.

11.2 LIMITES INFINITOS

Tomemos como exemplo o problema de encontrar, caso exista, o limite:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x^2}$$

Neste caso, quando analisamos os valores da função para valores próximos de $x=0$, percebemos que a função assume valores muito grandes. Podemos observar isso a partir do gráfico:



Em casos deste tipo, utilizamos a notação:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Entretanto, não se considera que o limite existe, pois infinito não é um número. Apenas utiliza-se esta notação em casos de crescimento sem limitação da função em valores de x próximos a um ponto.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

Nestes casos, dizemos que o limite de $f(x)$ quando tende a a é infinito.

Outro caso análogo, é quando a função cresce sem limitação em valor absoluto, porém em valores negativos quando x se aproxima de a . Neste caso, utiliza-se a notação:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Como um exemplo, podemos tomar:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x^2} = -\infty$$

De forma análoga, podem ser definidos limites infinitos laterais:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

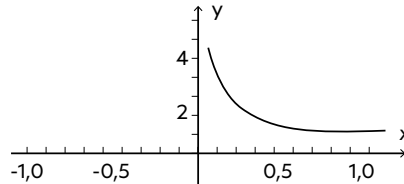
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

Vejamos outro exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[2]{x}}$$

Esse limite pode ser resolvido a partir da análise do gráfico da função:



No gráfico, percebe-se que quando x se aproxima de 0 pela direita a função cresce sem limitação. Neste caso, denotamos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[2]{x}} = \infty$$

Além disso, analisando o gráfico da função, observamos que ela cresce sem limites, sem nunca cruzar a reta (eixo y). Neste caso dizemos que a reta é uma **assíntota vertical** de $\frac{1}{\sqrt[2]{x}}$.

Dizemos que uma reta $x=a$ é assíntota vertical de uma curva $y=f(x)$ se ao menos uma das seguintes condições for satisfeita:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

11.3 PROPRIEDADE DOS LIMITES

1. Lei da soma: a soma dos limites é o limite da soma.
2. Lei da diferença: a diferença dos limites é o limite da diferença.
3. Lei do múltiplo constante: o limite de uma constante vezes uma função é a constante vezes o limite da função.
4. Lei do produto: o limite do produto é o produto dos limites.
5. Lei do quociente: o limite de um quociente é o quociente dos limites (desde que o limite do denominador não seja zero).

Considerando a existência dos limites:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

e sendo c uma constante, todas as propriedades citadas podem ser denotadas, respectivamente por:

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
5. $\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$

Além disso, alguns limites especiais são mais recorrentes e têm propriedades fixas, como, por exemplo:

$$6. \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n, \text{ sendo } n \text{ um inteiro positivo.}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow a} c = c$$

$$8. \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$9. \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n, \text{ sendo } n \text{ um inteiro positivo.}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}, \text{ sendo } n \text{ um inteiro positivo. Em casos de } n \text{ ser par, consideramos } a > 0.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}, \text{ sendo } n \text{ um inteiro positivo. Se } n \text{ for par, consideramos } \lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0.$$

Exemplos Resolvidos

1. Calcule os limites a seguir:

$$a) \lim_{x \rightarrow a} a$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 5} x^2 - 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

SOLUÇÃO DOS LIMITES

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} a$$

Podemos resolver esse limite a partir dos limites especiais apresentados; em especial a partir do limite especial 7, o qual determina que $\lim_{x \rightarrow a} c = c$. Desse modo,

$$\lim_{x \rightarrow 2} a = a.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 5} x^2 - 1$$

A partir da lei da diferença, temos que a diferença dos limites é o limite da diferença, portanto:

$$\lim_{x \rightarrow 5} x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow 5} x^2 - \lim_{x \rightarrow 5} 1 .$$

Agora o primeiro limite da diferença. 1 pode ser resolvido a partir do limite especial 6, que determina que $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$. Desse modo,

$$\lim_{x \rightarrow 5} x^2 = [\lim_{x \rightarrow 5} x]^2. \text{ Como } \lim_{x \rightarrow 5} x = 5, \text{ então } [\lim_{x \rightarrow 5} x]^2 = 5^2 = 25 .$$

Já o segundo limite da diferença pode ser resolvido a partir do limite especial 7 $\lim_{x \rightarrow n} c$. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 5} 1 = 1$$

Assim, a solução final para o limite é: $\lim_{x \rightarrow 5} x^2 - 1$ é

$$\lim_{x \rightarrow 5} x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow 5} x^2 - \lim_{x \rightarrow 5} 1 = 25 - 1 = 24$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Este limite poderia ser resolvido a partir da lei do quociente, da seguinte forma:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9}{\lim_{x \rightarrow 3} x - 3}$$

Observando a equação acima, o limite que está no denominador $\lim_{x \rightarrow 3} x - 3 = 0$, o que impede a aplicação da lei do quociente. Desse modo, devemos resolver o limite (c) a partir de manipulações algébricas.

Um caminho possível, é perceber que o numerador do quociente, $x^2 - 9$, é uma diferença de dois quadrados, sendo:

$$x^2 - 9 = (x + 3) \cdot (x - 3)$$

Substituindo essa expressão no limite (c), podemos obter:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3) \cdot (x - 3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3) \cdot \cancel{(x - 3)}}{\cancel{x - 3}} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x) - \lim_{x \rightarrow 3} (3) = 3 - 3 = 0 \end{aligned}$$

2. Calcule os limites laterais:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt[2]{x-2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1^-} |x|$$

SOLUÇÃO DOS LIMITES

$$a) \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt[2]{x-2}$$

A partir do limite especial 11, temos que $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$, portanto:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt[2]{x-2} = \sqrt[2]{\lim_{x \rightarrow 2^+} x-2}$$

Analisando o limite que está dentro da raiz pela direita, nós observamos que os valores para $x - 2$ se aproximam de 0. Desse modo,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt[2]{x-2} = \sqrt[2]{\lim_{x \rightarrow 2^+} x-2} = \sqrt[2]{0} = 0$$

$$a) \lim_{x \rightarrow -1^-} |x|$$

Sabe-se que a função modular é definida por partes, na seguinte forma:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Como o limite é para valores próximos de -1, vamos considerar $|x| = -x$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} |x| = \lim_{x \rightarrow -1^-} -x = -(-1)$$

3. Encontre o valor dos limites a seguir, caso existam:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{\sqrt[2]{x-1}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^4 - 2x + 1}{2x^8 - 16}$$

SOLUÇÃO DOS LIMITES

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[2]{x-1}}$$

Nouamente, caso aplicássemos a lei do quociente, perceberíamos que o limite do denominador seria igual a zero.

Em casos como esse, devemos utilizar de manipulações algébricas específicas. Neste caso, usaremos a racionalização.

Inicialmente, multiplicaremos a fração em cima e em baixo pelo conjugado do denominador. Ou seja, por $\sqrt[2]{x+1}$. Assim:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[2]{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[2]{x-1}} \cdot \frac{\sqrt[2]{x+1}}{\sqrt[2]{x+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (\sqrt[2]{x-1})}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[2]{x+1} = 1+1=2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{2x^4 - 16}$$

Neste caso, novamente não se pode fazer uso da lei do quociente, pois o limite do denominador é igual a zero. Deste modo, em casos como este, em que o limite tem x tendendo a infinito numa divisão de polinômios, usualmente pode-se dividir tanto o numerador quanto o denominador pelo maior termo de maior expoente no quociente. Assim, podemos dividir toda a equação por x^4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{2x^4 - 16} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2/x^2 + 1/x^4}{2 - 16/x^4} =$$

Como x tende ao infinito, todos os termos divididos por x ou x^2 vão tender a zero a medida que x cresce. Desse modo, o limite assumirá o seguinte valor:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{2x^4 - 16} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2/x^2 + 1/x^4}{2 - 16/x^4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

EXERCÍCIOS

1. (Stewart-2009) Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} x =$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 =$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} 2x =$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} x^6 =$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x) =$

f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x^2} =$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + x^2) =$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x}{3x - 1} =$

i) $\lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 - 2x + 1) =$

j) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 + 3x^2 - x + 3) =$

l) $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x - 1) =$

m) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^2} =$

n) $\lim_{x \rightarrow 0} (4x^3 + 2x^2 + x + 2) =$

o) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^4 - x^3 + x^2 + x + 1) =$

2. (Stewart-2009) Encontre o valor dos limites:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x - 1) =$

b) $\lim_{y \rightarrow -1} (y^3 - 2y^2 + 3y - 4) =$

c) $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 5}{2t^3 + 6} =$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 4} =$

e) $\lim_{y \rightarrow -2} \frac{y^3 + 8}{y + 2} =$

f) $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^3 - 1}{s - 1} =$

g) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12} =$

h) $\lim_{r \rightarrow 1} \sqrt{\frac{8r + 1}{r + 3}} =$

- i) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^2 + 3x + 4}{x^3 + 1}} =$
- j) $\lim_{y \rightarrow -3} \sqrt{\frac{y^2 - 9}{2y^2 + 7y + 3}} =$
- k) $\lim_{t \rightarrow \frac{3}{2}} \sqrt{\frac{8t^3 - 27}{4t^2 - 9}} =$
- l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} =$
- m) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-t}}{t} =$
- n) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h+1} - 1}{h} =$
- o) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2} =$
- p) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3} =$

3. (Stewart-2009) Calcule os limites laterais:

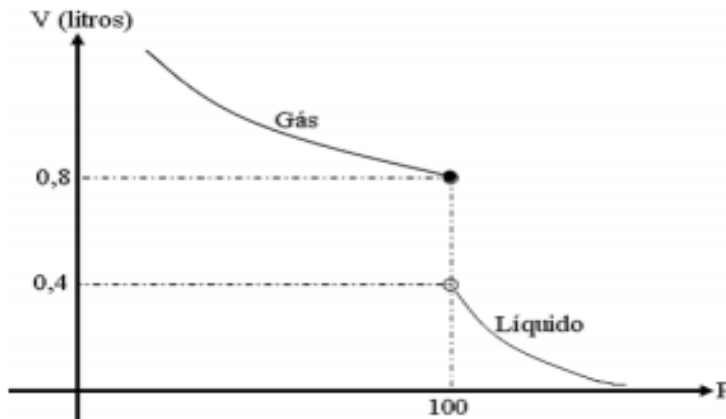
- a) $\lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{4}{x-6} =$
- b) $\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{4}{x-6} =$
- c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{1-x} =$
- d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3}{1-x} =$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+5}{x} =$
- f) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+5}{x} =$
- g) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} =$
- h) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} =$
- i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x^2} =$
- j) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x^2} =$

4. (Stewart-2009) Mostre que $f(x) = x/|x|$ não possui limite quando x tende a 0.

5. (Stewart-2009)

Um gás (vapor d'água é mantido à temperatura constante. A medida que o gás é comprimido, o volume V decresce até que atinja uma certa pressão (P) crítica. Além dessa pressão, o gás assume forma líquida. Observando a figura a seguir, determine:

a) $\lim_{p \rightarrow 100^-} V$ b) $\lim_{p \rightarrow 100^+} V$ c) $\lim_{p \rightarrow 100} V$



6. (Stewart-2009) Calcule os limites no infinito:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 3}{3x^2 - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 2}{5x^2 + 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-3}{2x^2+6}}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x+3}{2+x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

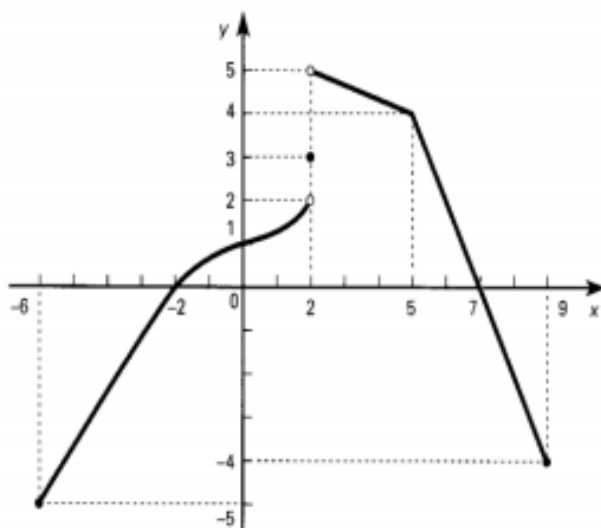
i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2+4}$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^2$

7. (Stewart-2009)

1) O gráfico a seguir representa uma função f de $[-6, 9]$ em \mathbb{R} . Determine:



a) $f(2)$ b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ e) $f(-2)$ f) $f(7)$

Anotações

GABARITO

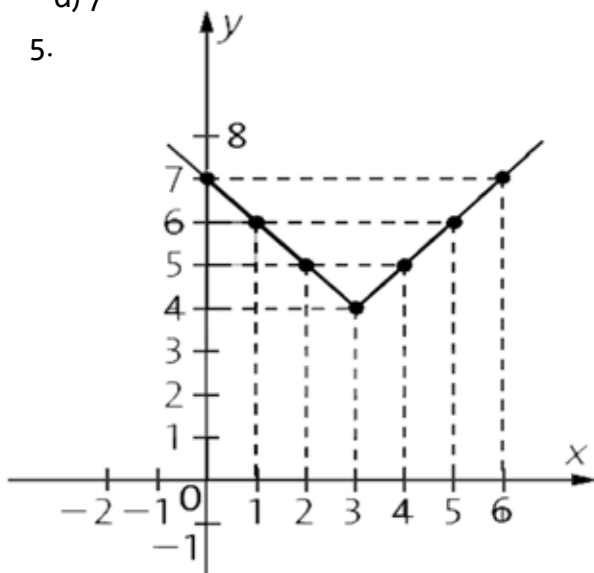
1. CONJUNTOS

1.
 - a) $\{0, 1, 2\}$
 - b) $\{-2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
 - c) $\{0, 1\}$
 - d) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
 - e) $\{\}$
 - f) $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$

2. B
3. B
4. B
5. C
6. D
7. B
8. B
9. D

2. FUNÇÕES

1. E
2. D
3. D
4.
 - a) 9
 - b) 8
 - c) 4
 - d) 7



6.

a) $x = -4$ e $x = 16$

b) $x = -1/4$ e $x = 2$

c) x

d) $x = -7, x = -5, x = -1$ e $x = 1$

e) $x = -1, x = 2, x = 3$ e $x = 6$

f) x

g) $x = -5$ e $x = 5$

h) $x = -2$ e $x = 2$

7. $m = -3$

Logaritmo e função logarítmica

8. D

9. C

10. C

11. A

12. B

13. E

14. E

15.

= 32

= $\frac{1}{4}$

16. E

17. = $3m + 2n$

18. A

Inequações de 1º grau

19.

a) $x < 2$ b) $x \geq -14$ c) $x \in [0,4)$ d) $x \in [1/2,3]$ e) $x \in [-2,-1/2]$

f) $x \in (-\infty,1) \cup (2,4)$

g) $x \in (1,3/2]$

h) $x \in (-4,-1) \cup (2,+\infty)$

20. D

Inequações de 2° grau

21.

$$a) \begin{cases} f(x)=0 \text{ para } x=-1 \text{ ou } x=4 \\ f(x)>0 \text{ para } x<-1 \text{ ou } x>4 \\ f(x)<0 \text{ para } 0<x<4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} f(x)=0 \text{ para } x=-2 \text{ ou } x=2 \\ f(x)>0 \text{ para } x<-2 \text{ ou } x>2 \\ f(x)<0 \text{ para } -2<x<2 \end{cases}$$

22.

a) $x \in (1, 7/3)$

b) $x \in [-3/2, 3/2]$

c) $x \in (-\infty, -1/2] \cup [5, +\infty)$

d) $x \in (-\infty, -1] \cup [1/2, +\infty)$

Função par e ímpar

23.

a) ímpar

b) par

c) sem paridade

Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva

24. d

25.

a) bijetora

b) injetora

Função de 1° grau

26.

27.

28.

Função de 2º grau

Raízes da função quadrática

29. $k=2$

30. $m \in \mathbb{R}, m < -3$

31. $k \in \mathbb{R} \mid k < 9 \text{ e } k \neq 0$

Vértice da parábola e valor máximo ou mínimo

32. $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -6\}$

valor mínimo de f : -6

33. $m < 1/3$

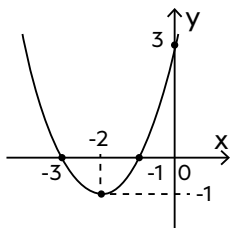
34.

a) 3s

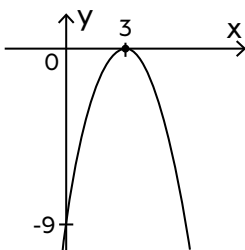
b) 9 metros

35.

a) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$



b) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\}$



36. Sim, (1,2) e (3,8)

37.

a) para cima

b) $x' = \frac{3}{2}$ e $x'' = -1$

c) $V(\frac{1}{4}, -\frac{25}{8})$

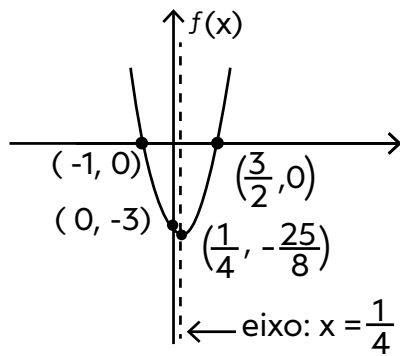
d) (-1,0) e $(\frac{3}{2}, 0)$

e) (0,-3)

f) $x \frac{1}{4} =$

g) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{25}{8}\}$

h)



38.

a) $\{x \mid 2-x \geq 0\} = \{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$.

b) $[0, 4]$

c) $[0, -\infty)$

d) $[-2, 2]$

39.

a) $(f \circ g \circ h)(x) = 3 \operatorname{sen} x^2 - 2$

b) $(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{x^6 + 4x^3 + 1}$

3. POLINÔMIOS;

4. EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Grau de igualdade dos polinômios

1. Não existe valor para m de forma que $p(x)$ tenha grau 2.
2. $a = 1/3$; $b = -1/3$; $c = -2/3$
3. $m = 1/2$; $n = 2/5$; $l = 3/2$
4. $a=1$; $b=3$; $c=2$

Divisão dos polinômios

5. $\text{quociente} = x^2 - 4x - 5$, $\text{resto} = 1$
6. $m=1$; $n=-2$
7. $H(x) = x^2 - 3x + 2$
8. As raízes são: $S = \{-1, 2, 5\}$

Dispositivo briot-ruffini

9.

a) $q(x)=5x-18$ $r(x)= 56$

b) $q(x) =x^3-2x^2+7x-13$ $r(x)=21$

c) $q(x)= 2x^2+x+6$ $r(x) = 25$

d) $q(x) = x^2 - x$; $r(x) = 2$

10. $a = -43/3$

11. $a=-9$ e $b=6$

Teorema de d'alembert

12. Não é divisível

13. $b = -1$ e $c = -18$

14.

a) $k = 8$

b) resto: $-2x^2-8$

Teorema do fator

15. $m = -6$ e $n = 1$

Raízes de um polinômio

16. $S = \{-1,1,1,1-i,1+i\}$

17.

a) $x_1 = 0$

$x_2 = -\sqrt{3}$

$x_3 = \sqrt{3}$

b) $(x^3 - 3x)/(x^2 - 1) = x$ e resto = $-2x$.

18. $a = 1$, $b = 2$

19. $y=x^3-11x^2+39x-45$

Relações de girard

20. $3/4$

21.

$x = -1$

$x = -1$

$x = 2$

22. 0

23.

$x = 2$

$x = 3$

$x = 1/3$

Pesquisa de raízes

24.

$x = 1/3$

$x = 3$

$x = 1$

25.

$x = 2$

$x = -\sqrt{3}$

$x = \sqrt{3}$

26.

$x = -2\sqrt{3}$

$x = -2$

$x = 2\sqrt{3}$

**5. RADICIAÇÃO E POTENCIAÇÃO;
6. PRODUTOS NOTÁVEIS;
7. FATORAÇÃO; 8. COMPLETAR QUADRADOS**

1. D
2. D
3.
 - a) 1524
 - b) 0,8125
4. A
5. C
6. E
7. $6x^2y^5$
8. $E = 24$
9. $(8x^3 - 21y^3) \cdot (8x^3 + 21y^3)$
10. B
11. B
12. 2180
13. C
14. C
15. D
16. B
17. B
18. C
19. A
20. C
21. B
22. B

9. TRIGONOMETRIA

1. $\sin 45 = \sqrt{2}/2$, $\cos 45 = \sqrt{2}/2$ e $\tan 45 = 1$
2. B
3. D
4. $x = 50\sqrt{3}$

Lei dos senos e cossenos

5. $\text{sen } \alpha = 3\sqrt{7}/8$

6. $\text{Fr} = 4\sqrt{19}$

7. 111,62 metros

Valor numérico do arco

8. $t = 78,5$

Senos, cossenos e tangentes

9.

a) $\pi/6, \text{sen } \pi/6 = 1/2$

b) $\pi/4, \text{sen } \pi/4 = \sqrt{2}/2$

d) $\pi/6, \text{sen } \pi/6 = 1/2$

e) $\pi/4, \text{sen } \pi/4 = \sqrt{2}/2$

f) $\pi/3, \text{sen } \pi/3 = \sqrt{3}/2$

10.

a) $\pi/6, \sqrt{3}/2$

b) $45^\circ, \sqrt{2}/2$

c) 0, 1

d) $\pi/4, \sqrt{2}/2$

e) $90^\circ, 0$

f) $\pi/3, 1/2$

11.

a) 0

b) -1

c) $\sqrt{3}/3$

d) $-\sqrt{3}/3$

e) $\sqrt{3}/3$

f) -1

10. RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1. B

2. B

3.

$$\operatorname{tg} x = 3/4$$

$$\operatorname{cotg} x = 4/3$$

$$\operatorname{cosec} x = 5/3$$

$$\operatorname{sec} = 5/4$$

4. $\operatorname{tg} y = 0,3$

5. $A = \sqrt{2}/2$

6. $(\sqrt{2}-\sqrt{6})/4$

7.

$$\operatorname{sen} 2x = \sqrt{3}/2$$

$$\operatorname{cos} 2x = -1/2$$

$$\operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3}$$

8. $\operatorname{sen} 2x = -0,96$

9. $\operatorname{tg} 2x = 4/3$

10. $3/5$

11. $\operatorname{sen} 2x = -120/169$

12. $\operatorname{sen} 2x = -3\sqrt{7}/8$

13. $5/3$

11. LIMITES

1.

- a) 2
- b) 8
- c) 2
- d) 1
- e) 6
- f) $4/9$
- g) 10
- h) $3/2$
- i) 31
- j) 7
- l) 0
- m) $3/4$
- n) 2
- o) 3

2.

- a) 7
- b) -10
- c) $-1/22$
- d) $-1/8$
- e) 12
- f) 3
- g) $1/7$
- h) $3/2$
- i) $\sqrt{14}/3$
- j) $\sqrt{6}/5$
- k) $3/\sqrt{2}$
- l) $1/2$
- m) $1/4$
- n) $1/3$
- o) -15
- p) $11/17$

3.

- a) ∞
- b) $-\infty$
- c) $-\infty$
- d) ∞
- e) ∞
- f) $-\infty$
- g) ∞
- h) $-\infty$
- i) $-\infty$
- j) $-\infty$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$$

O limite não existe

5.

- a) 0,8
- b) 0,4
- c) 0,8

6. a) $1/3$ b) 0 c) 0 d) 2 e) 0 f) $1/2$ g) 0 h) 2 i) $+\infty$ j) 0 k) 17. a) 3 b) 2 c) 5 d) \neq e) 0 f) 0

BIBLIOGRAFIA

NASCIMENTO, K.S.; FONSECA, R.F.; DANTAS, J. S.C. Análise do índice de reprovação e evasão na disciplina de cálculo diferencial e integral I da UFCG – Cuité, Educação no Século XXI. 14 ed. Belo Horizonte - MG: Poisson, 2019, v. 14, p. 06-141.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013. 1 v.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013. 2 v.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013. 3 v.

STEWART, James. Cálculo. 6. ed. Editora Pioneira Thomson Learning, 2009. 1 v.

CATAPANI, E. C. Cálculo em serviço: um estudo exploratório. In: Bolema, Rio Claro, ano 14, nº 16, p. 48-62, 2001.

MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO



PÁTRIA AMADA
BRASIL
GOVERNO FEDERAL

FNDE

Fundo Nacional
de Desenvolvimento
da Educação

PROEG

PRÓ-REITORIA DE
ENSINO E
GRADUAÇÃO



UFRR



PET CIVIL
UFRR

PET ENGENHARIA CIVIL - UFRR